Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague,
Section des Sciences, 8me série, t. I, no 5

HVORLEDES MATHEMATIKEN I TIDEN FRA PLATON TIL EUKLID BLEV RATIONEL VIDENSKAB

AF

H. G. ZEUTHEN

AVEC UN RÉSUMÉ EN FRANÇAIS

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række, I. 5

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1917

Pris: 8 Kr.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter,

6te Række.

Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling.

		Kr.	Øre
	I, med 42 Tavler, 1880—85	29.	50.
1.	**Prytz, K.** Undersøgelser over Lysets Brydning i Dampe og tilsvarende Vædsker. 1880	•	65.
2.	**Boas, J. E. V.** Studier over Decapodernes Slægtskabsforhold. Med 7 Tavler. Résumé en français. 1880	8.	50.
3.	**Steenstrup, Jap.** Sepiadarium og Idiosepius, to nye Slægter af Sepiernes Familie. Med Bemærkninger om to beslægtede Former Sepioloidea D'Orb. og Spirula Lmk. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1881	1.	35.
4.	**Colding, A.** Nogle Undersøgelser over Stormen over Nord- og Mellem-Europa af 12te—14de Novb. 1872 og over den derved fremkaldte Vandflod i Østersøen. Med 23 Planer og Kort. Résumé en français. 1881	10.	•
5.	**Boas, J. E. V.** Om en fossil Zebra-Form fra Brasiliens Campos. Med et Tillæg om to Arter af Slægten Hippidion. Med 2 Tavler. 1881	2.	•
6.	**Steen, A.** Integration af en lineær Differentialligning af anden Orden. 1882	•	50.
7.	**Krabbe, H.** Nye Bidrag til Kundskab om Fuglenes Bændelorme. Med 2 Tavler. 1882	1.	35
8.	**Hannover, A.** Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Anencephalia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 2 Tavler. Extrait et explication des planches en français. 1882	1.	60.
9.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Cyclopia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 3 Tavler. Extrait et explic. des planches en français. 1884	4.	35.
10.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Synotia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 1 Tavle. Extrait et explic. des planches en français. 1884	1.	30.
11.	**Lehmann, A.** Forsøg paa en Forklaring af Synsvinklens Indflydelse paa Opfattelsen af Lys og Farve ved direkte Syn. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1885	1.	85.
	II, med 20 Tavler, 1881—86	20.	»
1.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 1ste Afhandling. Med 6 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1881	3.	15.
2.	**Lorenz, L.** Om Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet. 1881	1.	30.
3.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 2den Afhandling. Med 9 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1882	5.	30
4.	**Christensen, Odin.** Bidrag til Kundskab om Manganets Ilter. 1883	1.	10.
5.	**Lorenz, L.** Farvespredningens Theori. 1883	•	60.
6.	**Gram, J. P.** Undersøgelser ang. Mængden af Primtal under en given Grænse. Résumé en français. 1884.	4.	•
7.	**Lorenz, L.** Bestemmelse af Kviksølvsøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal. 1885	•	80.
8.	**Traustedt, M. P. A.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Salperne. Med 2 Tavler. Explic. des planches en français. 1885	3.	»
9.	**Bohr, Chr.** Om Iltens Afvigelser fra den Boyle-Mariotteske Lov ved lave Tryk. Med 1 Tavle. 1885	1.	»
10.	—— Undersøgelser over den af Blodfarvestoffet optagne Iltmængde udførte ved Hjælp af et nyt Absorptiometer. Med 2 Tavler. 1886	1.	70.
11.	**Thiele, T. N.** Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. 1886	2.	»
	III, med 6 Tavler, 1885—86	16.	•
1.	**Zeuthen, H. G.** Keglesnitslæren i Oldtiden. 1885	10.	•
2.	**Levinsen, G. M. R.** Spolia Atlantica. Om nogle pelagiske Annulata. Med 1 Tavle. 1885	1.	10
3.	**Rung, G.** Selvregistrerende meteorologiske Instrumenter. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
4.	**Meinert, Fr.** De eucephale Myggelarver. Med 4 dobb. Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1886	6.	75.
	IV, med 25 Tavler. 1886—88	21.	50.
1.	**Boas, J. E. V.** Spolia Atlantica. Bidrag til Pteropodernes Morfologi og Systematik samt til Kundskaben om deres geografiske Udbredelse. Med 8 Tavler. Résumé en français. 1886	10.	50.
2.	**Lehmann, A.** Om Anvendelsen af Middelgradationernes Metode paa Lyssansen. Med 1 Tavle. 1886.	1.	50.
3.	**Hannover, A.** Primordialbrusken og dens Forbening i Truncus og Extremiteter hos Mennesket før Fødselen. Extrait en français. 1887	1.	60.
4.	**Lütken, Chr.** Tillæg til »Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten *Cyamus* Latr. eller Hvallusene«. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887	•	60.
5.	—— Fortsatte Bidrag til Kundskab om de arktiske Dybhavs-Tudsefiske, særligt Slægten *Himantolophus*. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887	•	75.
6.	—— Kritiske Studier over nogle Tandhvaler af Slægterne *Tursiops*, *Orca* og *Lagenorhynchus*. Med 2 Tavler. Résumé en francais. 1887	4.	75.
7.	**Koefoed, E.** Studier i Platosoforbindelser. 1888	1.	30.
8.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 3die Afhandling. Med 12 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1888	6.	45.
	V, med 11 Tavler og 1 Kort. 1889—91	15.	50.
1.	**Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om de tre pelagiske Tandhval-Slægter *Steno*, *Delphinus* og *Prodelphinus*. Med 1 Tavle og 1 Kort. Résumé en français. 1889	2.	75.
2.	**Valentiner, H.** De endelige Transformations-Gruppers Theori. Résumé en français. 1889	5.	50.
3.	**Hansen, H. J.** Cirolanidæ et familiæ nonnullæ propinquæ Musei Hauniensis. Et Bidrag til Kundskaben om nogle Familier af isopode Krebsdyr. Med 10 Kobbertavler. Résumé en français. 1890	9.	50.
4.	**Lorenz, L.** Analytiske Undersøgelser over Primtalmængderne. 1891	•	75.

(Fortsættes paa Omslagets S. 3.)

HVORLEDES MATHEMATIKEN I TIDEN FRA PLATON TIL EUKLID BLEV RATIONEL VIDENSKAB

AF

H. G. ZEUTHEN

AVEC UN RÉSUMÉ EN FRANÇAIS

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række, I. 5

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1917

Kap. I.

Om sammenlignende Studier af Mathematikens Historie.

Naar en Mathematiker af Fag vil dyrke sin Videnskabs Historie, maa han naturligvis først og fremmest underkaste sig de Regler, som gælder overalt, hvor man vil lære den objektive historiske Sandhed at kende. Han maa opspore den baade i de bevarede Skrifter, hvis Formaal det er at fremstille mathematiske Undersøgelser og Resultater, og i dem, der enten giver en historisk Beretning om tidligere Arbejder eller blot lejlighedsvis oplyser eller berører ældre eller samtidige Arbejder og disses Resultater, ofte maaske kun ved en Anvendelse af disse eller de derved benyttede Ræsonnementer paa helt andre Forhold. Disse forskellige Kilder maa han naturligvis underkaste den samme Kritik, som kræves af alle historiske Undersøgelser. Besidder han ikke selv visse Betingelser herfor, maa han søge Bistand i de bedste foreliggende Skrifter eller paa anden Maade, saaledes hos Filologer og Bibliografer om rigtig Texttydning, om Overleveringens Veje og Paalidelighed, om Textudgaver, om Kronologi o. s. v.

Selv vil han dog ogsaa have noget at bringe. Man har kaldt de mathematiske Sandheder „de evige Sandheder", hvad der dog ikke er det samme, som at de til enhver Tid, i hvilken de er traadt frem, skulde have antaget den samme Form — lige saa lidt som de er fremsatte paa samme Sprog; men i de ganske forskellige Udtryk kan man dog genkende de samme Sandheder. Disses Overensstemmelser vil ofte træde frem i ensartede Anvendelser, og de Slutninger, hvorved man gaar over fra den ene til den anden, maa trods de forskellige Fremstillingsmaader have væsentlig samme logiske Grundlag, hvis de ellers er mathematisk forsvarlige. Derved frembyder der sig Muligheder for den mathematisk dannede Dyrker af Mathematikens Historie til at tyde Texter, som ellers synes uforstaaelige eller har været misforstaaede, til at finde Forbindelser mellem historiske Meddelelser, som ellers kunde synes at gælde forskellige Ting, til at spore Forberedelsen til Opdagelser, som ellers synes først at skyldes en enkelt genial Mands enestaaende Seerblik, og frem for alt til at finde og forstaa baade Sammenhængen i en bestemt Tids mathematiske Forsken og Viden og derved dennes Sammenhæng med de tidligere og senere

Tiders Standpunkter, fra eller til hvilke der er givet Impulser. Ad disse Veje vil ikke alene den historiske Viden vokse og sikres: men der vil vindes netop det Kendskab til ældre Mathematik, som for Mathematikere og Pædagoger vil give det bedste Udbytte. Man vil erfare, ikke blot paa hvilke Tider, men ogsaa hvorledes man efterhaanden er naaet til Resultater, som man maaske nu beviser paa en helt anden Maade. Man vil lære Betragtningsmaader at kende, som er blevne opgivne overfor andre, der i det hele giver større Udbytte, men dog ikke gjør de gamle ganske overflødige, eller ogsaa omvendt i nu gældende Fremstillingsformer genkende Levninger af Methoder, der i sin Tid har haft deres Betydning, men som i de Forbindelser, hvori de nu optræder, er ganske overflødige og derfor bør fjernes fra Undervisningen.

Den Forstaaelse af hver enkelt Tids Mathematik, som det her kommer an paa, opnaas bedst ved en Sammenligning mellem de forskellige Tiders Arbejder. Derigennem ser man, hvad der er overleveret fra den ene Tid til den anden, og samtidig de Forandringer, som det er undergaaet. Naar disse Forandringer skyldes Fremskridt i Viden eller Hjælpemidler, vil ogsaa meget af det, man forud vidste, fremtræde i en ny Skikkelse. Det gælder da om at genkende det samme i den ældre Tid og faa fat paa, hvorledes det da kunde være fundet uden de nye Hjælpemidler. Disses Værdi lægger sig paa den anden Side for Dagen baade ved deres fuldstændigere Anvendelse paa det, man vidste før, og paa deres Anvendelse til Erhvervelse af ny Viden. Som enhver god Sammenligning maa den her forlangte være rettet paa baade at se Overensstemmelserne og Forskellighederne og at fortolke disses Omfang og Betydning. Rigtige Slutninger, hvis logiske Grundkerne er den samme, kan saaledes antage helt forskellige Skikkelser efter Forskellen i Udgangspunkt og de dertil knyttede Symboler eller efter det forskellige Formaal, som Undersøgelsen tilstræbte. Alt dette har f. Ex. været tilsigtet ved de Sammenligninger, som jeg i „Keglesnitslæren i Oldtiden“ (1885) og senere i andre Arbejder har anstillet mellem den antike geometriske og den moderne litterale Algebra, samt mellem den førstes Anvendelser paa den antike Keglesnitslære og den sidstes i den analytiske Geometri.

Den Sammenligning, som ligger en Nutidsmathematiker nærmest, er en Sammenligning med den Skikkelse, som Mathematiken nu besidder. For saa vidt denne betragtes som den fuldkomneste i alle Henseender og dens nuværende Form som den eneste, der er de nu opnaaede Resultater fuldtud værdig, indeholdes dog deri en stor Fare, nemlig den, at man særlig lægger an paa Skridt for Skridt at følge og notere Tidspunkterne for Opdagelsen af de enkelte Led i det nugældende mathematiske System og vurderer alle Fremskridt efter de Bidrag, de direkte har ydet til Opførelsen af dette System. Herved kan endog fremkomme urigtige Besvarelser af rent historiske Spørgsmaal. Den nævnte Opfattelse bibringer nemlig let og har ofte bibragt mathematiske Historieforskere den Forestilling, at de forskellige Fremskridt historisk nogenlunde maa have fulgt samme Orden som den, de derved indvundne mathematiske Resultater indtager i den nuværende Mathematik, saaledes at man

f. Ex. ikke har kunnet kende et eller andet af disse paa en Tid, da man ikke allerede kendte dem, der nu benyttes til at bevise det. De Slutninger man deraf kan have draget om, at man paa en vis Tid har maattet vide eller ikke kunnet vide dette eller hint, er derfor ofte ganske upaalidelige. Da vil grundigere historiske Oplysninger belære om, at der ogsaa gives andre Maader at se paa disse Sandheder end de, som man nu paaagter; de vil da udvide selve den mathematiske Synskreds. Jævnlig vil de Veje, man i ældre Tider er gaaet, ganske vist være mere intuitive og logisk mindre sikrede, end de, som man nu gaar; men i den Henseende ligner de efter fremragende nulevende Mathematikeres Vidnesbyrd dem, ad hvilke ogsaa disse selv først er naaet til betydningsfulde Opdagelser. Iøvrigt vil man ogsaa finde Forskelle mellem ældre og nyere Forskere, som ikke har beroet paa svigtende logisk Begrundelse hos de første, men kun paa Forskellen i Udgangspunkt og Forudsætninger; i saadanne Tilfælde vil Mathematikens Historie kunne udvide Mathematikernes Synskreds.

Noget lignende gælder overhovedet ved Sammenligninger mellem forskellige Tidsaldres Videnskab. Ved en saadan Sammenligning kan Eftertrykket lægges paa to forskellige Steder. For ret at tydeliggøre Værdien af de Fremskridt, som betegner Overgangen fra den ene Tidsalder til den anden, kan man fremhæve alt det, som denne sidste derved har forud for den foregaaende. Dette er ret og billigt; derved gives den rette Forstaaelse af Udviklingen, og derved lægger man Nutidens vel fortjente Paaskønnelse for Dagen. En saadan Sammenligning forsømmes da ogsaa sjelden. Men man maa ikke derover glemme, hvad der allerede skyldes den ældre Tid, uden hvis medvirkende Forberedelse de fremhævede Fremskridt ikke kunde være gjort. I den er ofte allerede de simpleste og netop derved ikke mindst vigtige af de Resultater fundne, som har givet Anledning til Dannelse af Methoder, der er betydningsfulde ved deres langt større Almindelighed, men som hvis Førstegrøde nu de tidligere kendte Resultater saa naturlig frembød sig, at de snart blev antagne for først at være indvundne ad denne Vej. Jeg skal saaledes minde om de mange Kvadraturer, der gik forud for Integralregningen. Den Sammenligning, som jeg vil have frem, bør ikke alene fremhæve de Fortrin, som paa det mere udviklede Trin haves fremfor den Tid, som gik forud; den bør tillige fremdrage de Betingelser, som i denne skabtes for de senere Fremskridt. Begge Dele fortjener Mathematikhistorikerens Omtale og Paaskønnelse. Det kan tilføjes, at Kendskabet til den ældre Forberedelse af Fremskridtene og den dermed vundne Forstaaelse af, hvorledes de virkelig er foregaaet, og hvor stort Arbejde de har krævet, i Reglen ingenlunde vil svække vort Blik for Betydningen af selve Fremskridtene eller vor Paaskønnelse overfor dem, der har fuldbragt dem.

Dette gælder ogsaa om det store Fremskridt fra en mere eller mindre sammenhængende Viden til Videnskab, som fuldbyrdedes af det hellenske Folk. Overfor de mange Forsøg paa at tillægge de orientalske Folk lige fra Kina og til Ægypten ældre Grundlæggelse af en Videnskab, der fortjener dette Navn paa samme Maade som navnlig den græske Mathematik, Forløberen for en videnskabelig Behandling ogsaa af andre Naturfag, har man med Rette[1]) paavist Forskellen mellem den af Grækerne indførte Tankegang med dens fulde logiske Sammenhæng og saadanne ældre Betragtningsmaader, som man har kunnet betegne med Ord som Overtro, mere eller mindre tilfældig Empiri, rent intuitiv Tilegnelse o. s. v. Man har ogsaa kunnet pege hen paa den hos Grækerne saa bestemt fremtrædende Lyst til Viden og Higen efter at tilegne sig denne for dens egen Skyld. Alt dette er sandt og fortjener at siges; men det fremkalder da tillige Ønsket om at forstaa, hvorledes Hellenernes Forgængere, med saa skrøbelige Hjælpemidler som de her nævnte og uden Hellenernes videnskabelige Drift, har kunnet naa en saa omfattende Viden som den, de faktisk tidligere besad, og som for en stor Del fra dem er gaaet over til de græske Forskere.

Skønt det kun er i Henseende til Mathematiken, at jeg tør haabe at give et virkeligt Bidrag til denne Forstaaelse, skal jeg dog her forud gjøre et Par almindelige Bemærkninger. Jeg skal begynde med at henlede Opmærksomheden paa, at medens den videnskabelige Drift saa aabenlyst træder frem hos Hellenerne, mere aabenlyst maaske, fordi vi kender dem og Overleveringerne fra dem bedre, saa har en saadan Drift ogsaa tidligere været tilstede om end skjult under andre Skikkelser, og da navnlig været knyttet til Gudsdyrkelse og Helligdomme. En saadan Tilknytning vidner netop om den Værdi, som man tillagde en eller anden Viden. Naar saaledes Milhaud S. 86, Note, forklarer den nøjagtige Orientation af Pyramiderne derved, at den knytter sig til Ægyptens religiøse Myther, og altsaa ikke skriver sig fra virkelig Interesse for at gjøre en astronomisk Bestemmelse saa god som mulig, saa forekommer det mig omvendt, at denne Interesse fremhæves ved at give den et religiøst Formaal. Endnu bestemtere træder det samme frem ved de gamle indiske Çulbasūtraer. De er Haandbøger til Brug ved den ritualmæssige Konstruktion af Altere og andre Helligdomme og indeholder som Indledning hertil et vist Antal vigtige geometriske Sætninger og Konstruktioner, deriblandt, som vi senere skal se, den pythagoreiske Sætning og dens Anvendelse til Konstruktion af rette Vinkler. De, der først har givet Altrene saadanne Former, at derved en Række af forskellige retvinklede Trekanter med rationalt Sidetal kommer til Anvendelse, og til samme Brug fundet en ypperlig Tilnærmelsesværdi til $\sqrt{2}$, har sikkert netop ved denne Anvendelse ogsaa lagt deres intellektuelle Interesse for disse Resultater for Dagen, og den paa denne Maade helligede Interesse er bevaret og udviklet ved deres Sammenstilling i Çulbasūtraerne.

Overtroisk Fastholden af urigtige Forestillinger og Forklaringer længe efter, at deres Urigtighed er lagt klart for Dagen, eller dog langt bedre Forklaringer er fremkomne, er naturligvis kun skadelig; men det, som er Overtroens Genstand, kan fra først af være Forklaringsforsøg, med hvilke det ikke var urigtigt at begynde, og som maatte prøves, før der ved deres Forkastelse banedes Vej for bedre

[1]) Se saaledes G. Milhaud: *L'apport de l'Orient et de l'Égypte dans la science greque*, en i 1893 offentliggjort Afhandling, som han med et Tillæg har medtaget i *Nouvelles études sur l'histoire de la pensée scientifique*. Paris 1911.

Forklaringer. Dette gælder endog om animistisk Overtro. Efter den vellykkede Opdagelse, at den stærkeste Følelse af Lyst og af Ulyst skyldes Moderen og fjendtlige Mennesker, er det ganske naturligt — ja i Grunden stemmende med gode Regler for Dannelse af Hypotheser — at Barnet ogsaa tillægger andre Genstande, hvormed det kommer i Berøring, Liv. Forsøg paa noget lignende har ogsaa haft en vis Berettigelse hos Folk paa et barnligt Udviklingstrin. Endnu paa den Tid, da man havde lagt Mærke til Planeternes tilsyneladende Baner paa Himmelkuglen, kendte man kun hos levende Væsener saa uregelmæssige Bevægelser. Astrologien rummer ganske vist et Væv af Overtro og mere eller mindre bevidst Bedrageri; men fra først af var det ikke saa urimeligt, efter at have fundet Sammenhæng mellem Solens og Maanens Bevægelse og Vekslingen af Lys og Varme og Vejrlig og — om end, som vi nu ved, kun paa Grund heraf — af Sygdomme, at gaa videre, noget, som jo ogsaa skulde lykkes for Ebbe og Flods Vedkommende. Den saaledes fremkomne Astrologi har givet Anledning til Iagttagelser, som senere skulde komme Astronomien til Gode.

Empiriker er et Ord, som man skulde tro ikke betød noget daarligt overfor Videnskaber, der bygger paa Erfaring; derved betegnes imidlertid de, der bygger paa saadanne Erfaringer, som ganske tilfældig og uden Lejlighed til nøjere Prøvelse er faldne i deres Lod, og paa de rent subjektive Indtryk, disse har gjort paa dem, uden at de har bragt det i nogen Forbindelse med de mere omfattende Erfaringer, som Menneskeheden allerede har gjort, og med den Sammenhæng i Naturen, som derigennem har lagt sig for Dagen. Denne Bebrejdelse kan imidlertid kun ramme dem, der lever paa Tider, da noget saadant allerede foreligger, men derimod ikke dem, der paa et Omraade først har begyndt at indsamle Erfaringer. Det er jo netop disses Forarbejder, der, naturligvis efter Udskilning af mange værdiløse Slagger, har bidraget til at skabe det Materiale, som senere har tilladt at gaa mere kritisk til Værks.

Intuitiv vil man vel kalde enhver Tilegnelse af Sandheder, for hvis ganske umiddelbare Iagttagelse eller logiske Begrundelse man *ikke* er istand til at gøre sig Rede. Det er Psykologernes Sag at finde en mere positiv Bestemmelse af de sjælelige Evner, som tillader denne Tilegnelse, der maa bero paa en Kombination af Sanseoplevelser, Erindringer og underbevidste logiske Slutninger. De underbevidste logiske Slutninger vil dog efterhaanden blive bevidste, og naar dette har været Tilfældet, maa Historikeren stræbe at udskille de bevidste Slutninger. Denne Forpligtelse maa ikke mindst paahvile mig her, naar jeg forsøger *Sammenligning mellem den ældre geometriske Viden, som for en stor Del er bygget paa Intuition, og den første i et logisk System indordnede Geometri*. Sammenligningen vil kaste Lys til begge Sider, derved ogsaa paa det, som den ældre Geometri allerede havde naaet.

Kap. II.

Mathematiken som rationel Videnskab.

For at holde det ud fra hinanden, som skal udgøre Genstanden for vor Sammenligning, skal vi begynde med at omtale de Krav til en systematisk Behandling af Mathematiken, som PLATON gjorde sig til Talsmand for, som findes gennemførte i EUKLID's Elementer og er fulgte af hans græske Efterfølgere, og som endnu danner en Rettesnor for Mathematikens baade skolemæssige og videnskabelige Behandling, om end baade Udgangspunkt og dermed Formerne for Gennemførelsen har ændret sig. Disse Krav gaar ud paa, at Mathematiken skal være en logisk Videnskab, hvor hvert enkelt Resultat naas som en Følge af de foregaaende. Sætninger og Beviser maa udtrykkes dels ved saadanne Ord af det sædvanlige Sprog, som kan antages vel kendte og fri for enhver Tvetydighed, dels ved Ord og Symboler, for hvis Betydning man forud gør Rede. Denne Redegørelse findes i Definitioner, som kan være saa fuldstændige, at de selv indeholder de Forudsætninger, som ikke selv bevises, men danner Grundlaget for det derpaa byggede System; men de foreløbig opstillede Definitioner kan ogsaa indskrænkes til korte Indførelser af de Ord eller andre Symboler, hvortil de nye Begreber skal knyttes; de Egenskaber, som nærmere skal karakterisere disse Begreber og danne Udgangspunktet for den paafølgende Undersøgelse, fremsættes dernæst i Postulater eller Regler for Operationer og Regninger med de indførte Symboler.

I dette sidste Tilfælde bliver Postulaterne i logisk Henseende en uundværlig Fuldstændiggørelse eller snarere den væsentlige Del af Definitionerne. Som saadanne fremtræder de i PASCH's og hans Efterfølgeres moderne Undersøgelser af Geometriens Grundlag. Og allerede EUKLID bærer sig i de fleste Tilfælde ad paa samme Maade. Saaledes er den opstillede Definition paa en ret Linie kun en foreløbig Indførelse af dette Begreb; men de Egenskaber, som danner Udgangspunktet for den paafølgende geometriske Undersøgelse af den rette Linie og de deraf dannede Figurer, fremsættes først i Postulaterne. En lignende Rolle spiller de paafølgende „Almindelige Begreber", hvori de Kendetegn nævnes, som karakteriserer Begrebet Størrelse og dets Fremtræden i Geometrien.

Den her skildrede, om man vil, definerende Rolle spiller de tre Arter af Forudsætninger i det af EUKLID opførte System. Hvorfor hver enkelt Forudsætning er medtaget, forklares først ved den Brug, der gøres af den i det derpaa byggede System. Der er altsaa ikke nærmest Tale om en Række Forudsætninger, som man nu en Gang har, og et Arbejde paa dernæst at bringe det mest mulige ud af disse Forudsætninger. Rent formelt faar ikke blot Valget af dem, men de selv et vist Præg af Vilkaarlighed, idet der ikke siges et Ord om, hvorfra man har dem. De fremtræder hos EUKLID som umiddelbart indlysende, en Opfattelse, som man fra Oldtiden af ogsaa i Filosofien har forbundet med disse Axiomer, som de kaldes med et mere omfattende Ord. Hvorledes de er fremkomne hos EUKLID, hører med til, hvad der skal beskæftige os; men det ses straks, at de er knyttede til en Sum af Erfaringer om den os omgivende, til Rum og Tid bundne, Verden. Derved er det, at den derpaa byggede Lære bliver skikket til at befæste og yderligere udvikle Forstaaelsen af den ydre Verden og gøre os denne underdanig. Om Anvendelsen dertil siger EUKLID dog slet intet, ja han forlader end ikke sin paa Forudsætningerne byggede almindelige Fremstilling for at give Talexempler eller andre Exempler paa Anvendelse, hverken saadanne, som kunde tjene til Øvelse eller nøjere Forklaring af Sætningerne selv, eller saadanne, som kunde vise den Nytte, som de kan gøre ogsaa udenfor den geometriske Lærebygning. Den eneste Anvendelse, som gøres af de enkelte Sætninger, er Udledelsen af nye almindelige Sætninger, paa hvilke der straks, eller senere hen i Bogen, eller under fortsat videnskabeligt Arbejde kan bygges videre.

Denne Form for en rent rationel Behandling fulgtes nøje af EUKLIDS Efterfølgere. Hvor det — med eller ofte uden Grund — har forekommet disse, at EUKLID har brugt en Forudsætning uden at betinge sig Ret dertil ved forud udtrykkelig at opstille den som saadan, har de tilføjet den. Naar de gaar udenfor det af EUKLID behandlede Omraade, begynder de med at opstille de for dette Omraade gældende Forudsætninger, som man vil gøre Brug af. Dette gør saaledes ARCHIMEDES. Forud for Bestemmelsen af krumme Liniers Længde og krumme Fladers Areal og for sine statiske Undersøgelser forklarer han de nye Begrebers Betydning ved Definitioner og Postulater, og ogsaa her er Betingelsen for, at man skal følge hans Udvikling og tiltræde hans Slutninger, den, at man anerkender de opstillede Forudsætninger; men heller ikke han siger, hvorfra han har disse. — Paa anden Vis følger man i Nutiden i Hovedsagen den samme Regel, naar man begynder med at opstille Betydningen af de mathematiske Tegn, som man bruger, og Reglerne for Operationer med disse.

Ved en saadan udtrykkelig Udtalelse af de Egenskaber, man i sin Undersøgelse vil tillægge de Begreber, hvormed man vil operere, løsrives disse fra den Sansning, hvoraf de oprindelig er fremgaaede, og kan som Symboler anvendes paa alle de Omraader, hvorpaa de opstillede Forudsætninger passer. Alle Operationer sker nemlig i Kraft af disse Forudsætninger. Uden her at prøve, i hvilket Maal EUKLID virkelig maatte have naaet dette, kan vi om den beskrevne principielle Fremgangsmaade sige, at de saaledes indførte ideale Figurer: Punkt uden Udstrækning, Linie uden Tykkelse o. s. v., Linier, hvis Punkter er underkastet en i Ord udtalt Lov, men som ikke nøjagtig lader sig konstruere, lige saa vel kan anvendes som Symboler som den nyere Mathematiks Bogstavsymboler og Operationstegn. Ogsaa Bogstaverne løsrives ganske fra deres Brug som Lydtegn; men de opstillede Regler for de betegnede Operationer maa nøjagtig angives og følges. Saa kan man ved at tillægge Bogstaverne forskellige Talværdier under et underkaste disse de samme Operationer, ja man kan endog som i Operationskalkylen lade Bogstaverne betegne forskellige Operationer, naar disse skal underkastes saadanne Kombinationer, paa hvilke de klart udtalte Regler lader sig anvende.

En saadan exakt Brug af Symboler er væsentlig forskellig fra den Brug, som man gør af Billeder ikke blot i Poesi, men jævnlig ogsaa i filosofiske Undersøgelser. At denne sidste Brug kan gøres med Haab om et rigtigt Udbytte, beror paa, at der er nogen Sandsynlighed for, at den Overensstemmelse, som ligger til Grund for Valget af Billedet kan være forbunden med saadanne fælles om end ukendte Aarsager, som fører til ensartede Resultater paa begge Omraader: Billedet og det Afbillede. Deri ligger Analogislutningens Berettigelse som en foreløbig Slutningsmaade, der rigtignok trænger til yderligere Bekræftelse. En tilsvarende billedlig Brug gør man af den exakte Videnskabs Symboler, naar man anvender dem udenfor det Omraade, for hvilket Operationer med Symbolerne er strengt definerede, naar man f. Ex. gør almindelige Slutninger fra en tegnet Figur uden at sikre sig, at de om denne anstillede Betragtninger gælder for alle de ideale Figurer, som den skal fremstille, eller naar man anvender litterale algebraiske Operationer, hvis Betydning kun er sikret for hele, eller positive, eller rationale, eller reelle, eller endelige Størrelser, paa henholdsvis brudne, negative, irrationale, imaginære, uendelig store eller smaa Størrelser eller paa uendelig mange. Historisk var oprindelig den litterale Algebra kun forklaret for rationale og positive Størrelser. Udenfor dette Omraade var dens „Symboler“ kun, hvad vi her har kaldt „Billeder“, hvis Brug dog gennem „Analogislutninger“ kunde føre til rigtige Resultater, som saa bagefter trængte til en nærmere Forklaring. Dette gjaldt f. Ex. om Forklaring af en funden negativ Rod i en Ligning. En udtrykkelig Udvidelse til irrationale Størrelser gav først Descartes i Begyndelsen af *La Géométrie*, og dens Exakthed sikrede han ved Henvisning til den, som de Gamle forlængst havde opnaaet for deres geometriske Symboler. Exakt blev Anvendelsen af Algebraens Symboler paa imaginære Størrelser først omkring Aaret 1800, da Wessel, Argand og Gauss gav en nøjagtig Bestemmelse af, hvad Operationerne i dette Tilfælde betyder. Og Mathematikens Historie viser, at Anvendelsen af Algebraens Symboler paa uendelig store eller smaa Størrelser og paa uendelig mange Størrelser kan føre til urigtige Resultater. Derfor har de maattet underkastes nye Regler for ogsaa her at kunne faa en exakt Anvendelse.

Det blev lige berørt, at ogsaa den gamle Geometri kunde faa en symbolsk Anvendelse. Den har faaet en saadan til exakt og almindelig Fremstilling af algebraiske Operationer og Resultater. Lige saa tidlig, som man kendte den pythagoreiske Sætning, har man vidst, at naar Siderne i en retvinklet Trekant kan udtrykkes ved hele Tal a, b og c, kan man give Sætningen to forskellige Former, nemlig: $a^2+b^2=c^2$, og: Summen af Kvadraterne med Siderne a og b er ligestor med Kvadratet med Siden c. Da man imidlertid opdagede, at, som vi nu siger, $\sqrt{2}$ er irrational, var kun den sidste Udtryksmaade mulig, naar Trekantens Katheter er ligestore. For at undgaa den Vanskelighed, som i den arithmetiske Bestemmelse nu overvindes ved en Udvidelse af Talbegrebet med saadanne irrationale Tal som

$\sqrt{2}$, kunde man holde sig til den geometriske Maade at udtale den samme Sætning paa. Lignende Vanskeligheder undgik man ved ikke at tale om Multiplikation af to almindelige Tal, thi en saadan Operation var ikke forklaret, naar Tallene var irrationale; men man fremstillede Størrelserne ikke ved Tal, men som Liniestykker, og i Stedet for Multiplikation af de to Størrelser blev da sat: Dannelse af et Rektangel med disse til Sider. En Ligning, hvis Led alle er af anden Grad med Hensyn til de deri indgaaende Størrelser, blev da en Relation af første Grad mellem Rektangler, og den videre Behandling af Ligningerne foregik ved Omlægning af saadanne plane Figurer. Denne geometriske Algebra var før PLATON's Tid saa vidt udviklet, at man ved de omtalte Symboler kunde fremstille en Løsning af Ligninger af anden Grad paa en Maade, som er lige anvendelig, hvad enten de givne og søgte Størrelser kan udtrykkes ved rationale Tal eller ikke; i første Tilfælde er Ligningen numerisk. Ved Anvendelse af retvinklede Parallelepipeder, derunder specielt Terninger, kunde man paa lignende Maade fremstille Udtryk og Ligninger af tredie Grad med Hensyn til de deri indgaaende Størrelser. Videre kunde man gaa ved at anvende Proportioner, ved hvis Sammensætning man kunde fremstille Produkter af lige saa høje Grader, som man vilde. De Forhold, man først havde behandlet, var rigtignok kun Forhold mellem kommensurable Størrelser; men EUDOXOS viste, hvorledes man ogsaa paa exakt Maade kunde udtrykke Ligestorhed og Uligestorhed af Forhold mellem inkommensurable Størrelser. Den derpaa grundede almindelige Proportionslære er fremsat i EUKLID's V. Bog. Derved benyttes et Postulat (V. Def. 4), der ogsaa tillader Behandlingen af Opgaver, som gaar ud paa infinitesimale Bestemmelser.

Kap. III.

PLATON's Krav til Mathematiken som rationel Videnskab.

Pythagoreernes Opdagelse af, at der overhovedet gives irrationale Størrelser, det dermed forbundne Krav om ikke uden videre at overføre paa irrationale Størrelser, hvad man ved om rationale, et Krav, som traadte tydelig frem ved ZENON's Nægtelse af Kontinuiteten, den geometriske Algebras Omgaaen og EUDOXOS' Løsning af denne Vanskelighed, THEODOROS' og THEAITETOS' systematiske Efterforskning af, hvilke Størrelser der er rationale og hvilke irrationale, alt dette viser, hvor dybtgaaende Krav Hellenerne allerede længe før Platons Tid var begyndt, og paa hans Tid vedblev at stille til en exakt og almindelig Behandling af Geometrien og gennem den af Algebraen. Disse Krav maatte yderligere forøges ved saadanne Fremskridt i positiv Viden som dem, der vandtes ved HIPPOKRATES' geometriske Arbejder, ved DEMOKRIT's Bestemmelse af Pyramidens og Keglens Rumfang og ved Opdagelsen af, at der ikke gives uendelig mange Slags regulære Polyedre som uendelig mange Slags Polygoner, men kun fem. Det ses ogsaa, at man paa forskellig Maade var inde paa Veje til at imødekomme disse Krav.[1]) Paa en fuldt ud tilfredsstillende Maade kunde dette dog først ske ved en konsekvent Opførelse af en Lærebygning af den logiske Form, som er skildret i forrige Kapitel. Uden det vil Geometrien bestaa af en mere eller mindre tilfældig Blanding af Resultater vundne ved Intuition og saadanne, som man deraf har udledet ved rigtige Slutninger. Dette maa saaledes have været Tilfældet med de Elementer, som allerede HIPPOKRATES siges at have skrevet.

Den forstandsmæssige Side af Mathematiken vakte i høj Grad PLATON's Interesse. Denne gjaldt ikke mindst de irrationale Størrelser; den Egenskab, der skiller dem fra de rationale, træder nemlig, naar de fremstilles geometrisk, slet ikke frem for Intuitionen og har ingen Betydning for praktiske Anvendelser, i hvilke en tilstrækkelig nær Tilnærmelsesværdi er lige saa god som den mathematisk exakte Værdi. Den er saaledes kun til for den forstandsmæssige Behandling af Mathematiken og maatte netop derfor interessere PLATON. I „Lovene" bebrejder han sine Landsmænd, at de ikke tidligere har bemærket, at der existerer saadanne Størrelser, og i „Theaitet" fremhæver han denne Mathematikers Fortjenester af Paavisningen af, hvilke Rodstørrelser der er irrationale. Den systematiske Maade, hvorpaa Bestemmelsen heraf, i Overensstemmelse med THEODOROS' Indførelse af Begrebet inkommensurable Størrelser, sker ved Tilknytning til Methoden til at finde største fælles Maal (Oversigt, 1910 og 1915), har aabenbart vakt hans Beundring. Ikke mindst paa dette Punkt nærmer Mathematiken sig til at realisere hans Ideal af en Videnskab, der helt opføres efter rationelle[2]) Grundsætninger; ja dette Ideal er vel for en Del blevet til ved Betragtning af, hvad han allerede forefinder i Mathematiken. Hans og hans nærmeste Efterfølgeres Bestræbelser efter at opnaa det samme for andre Videnskaber træder frem i hans og deres Forsøg paa at føre Egenskaber ved Tal og ved Figurer ind i Forklaringen af andre Naturforhold, hvori han iøvrigt følger Pythagoreernes Exempel. Herhen hører det gaadefulde saakaldte Mathematiske Tal, der efter de fremkomne Løsninger af Gaaden næppe har frembudt synderlig mathematisk Interesse, og SPEUSIPPOS' Anvendelser af de arithmetiske Forbindelser mellem Tallene 1—10, hvis mathematiske Interesse kun knytter sig til den Omhu, hvormed man har fremhævet de allersimpleste Talforbindelser; end-

---

[1]) Jeg henviser til mine Afhandlinger i Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Oversigt: *Sur la constitution des livres arithmétiques des Éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité.* 1910. — *Sur les connaissances géométriques des Grecs avant la réforme platonicienne de la géométrie.* 1913. — *Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationelles.* 1915. — Citeres som: Oversigt 1910, 1913, 1915.

[2]) Den paa dansk (og tysk) gældende Sprogbrug er her for saa vidt mindre heldig, som rational og rationel kommer til at betyde ganske forskellige Ting. Ovenfor kunde man saaledes have sagt: Det, der karakteriserer irrationale Størrelser, er kun til for en rationel Betragtning. Stort bedre bliver det ikke, naar man paa fransk, hvor rational kaldes „rationnel", kan udtrykke det, vi her har kaldt rationel, ved „raisonné".

videre Anvendelsen af de regulære Polyedre til Forklaring af de fysiske Grundelementers Egenskaber.

Platon's Opfattelse af Mathematiken som rent rationel Videnskab og den Pris, han sætter paa den, naar den dyrkes alene for den derved erhvervede Viden og uden Hensyn til praktiske Anvendelser, træder frem i sin fulde Sammenhæng i „Staten“s VI. og særlig i VII. Bog, hvor han skildrer deres Opdragelse, som skal forberedes til at vogte den ideale Stat, som han har for Øje. Den særlige Stilling, som disse Mænd skulde indtage, bringer ham vel ogsaa til at se hen til en enkelt praktisk Anvendelse af Mathematiken, nemlig paa Krigsvæsenet; men hovedsagelig skulde de dyrke den for den derved vundne „Forstandserkendelses“ (*διάνοια*) egen Skyld, altsaa netop som den exakte Videnskab, der systematisk bygger paa et rationelt Grundlag, som den ikke umiddelbart kan laane fra den ydre Verden. Herpaa peges allerede hen i følgende Ytringer i Slutningen af sjette Bog, som vi skal supplere med et Citat af Platon's „Timaios“. I „Staten“ VI siges:[1])

510 c 2. *ὅτι οἱ περὶ τὰς γεωμετρίας τε καὶ λογισμοὺς καὶ τὰ τοιαῦτα πραγματευόμενοι, ὑποθέμενοι τό τε περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον καὶ τὰ σχήματα καὶ γωνιῶν τριττὰ εἴδη καὶ ἄλλα τούτων ἀδελφὰ καθ' ἑκάστην μέθοδον, ταῦτα μὲν ὡς εἰδότες, ποιησάμενοι ὑποθέσεις αὐτά, οὐδένα λόγον οὔτε αὐτοῖς οὔτε ἄλλοις ἔτι ἀξιοῦσι περὶ αὐτῶν διδόναι ὡς παντὶ φανερῶν, ἐκ τούτων δ' ἀρχόμενοι τὰ λοιπὰ ἤδη διεξιόντες τελευτῶσιν ὁμολογουμένως ἐπὶ τοῦτο οὗ ἂν ἐπί σκέψιν ὁρμήσωσι.*

at de, der giver sig af med Geometri og Regnekunst og deslige, forudsætter det lige og ulige, Figurer, tre Slags Vinkler og andet hermed beslægtet, efter enhver Undersøgelses Natur, og, idet de gaar ud fra, at de kender dette, da de har gjort det til Forudsætning, hverken overfor sig selv eller andre anser det for nødvendigt at give nogen yderligere Forklaring deraf, da det maa være tydeligt for enhver, og, idet de gaar ud fra det, fortsætter den hele Slutningsrække saalænge, indtil de paa følgerigtig Maade er komne til det, de egentlig vil vise.

510 d 5. *Οὐκοῦν καὶ ὅτι τοῖς ὁρωμένοις εἴδεσι προσχρῶνται καὶ τοὺς λόγους περὶ αὐτῶν ποιοῦνται, οὐ περὶ τούτων διανοούμενοι, ἀλλ' ἐκείνων πέρι οἷς ταῦτα ἔοικε, τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ ἕνεκα τοὺς λόγους ποιούμενοι καὶ διαμέτρου αὐτῆς, ἀλλ' οὐ ταύτης ἣν γράφουσιν, καὶ τἆλλα οὕτως, αὐτὰ μὲν ταῦτα ἃ πλάττουσίν τε καὶ γράφουσιν, ὧν καὶ σκιαὶ καὶ ἐν ὕδασιν εἰκόνες εἰσίν, τούτοις μὲν ὡς εἰκόσιν αὖ χρώμενοι, ζητοῦντες δὲ αὐτὰ ἐκεῖνα ἰδεῖν ἃ οὐκ ἂν ἄλλως ἴδοι τις ἢ τῇ διανοίᾳ.* —

Ligeledes, at de tager synlige Figurer til Hjælp og knytter deres Slutninger til dem, skønt det ikke er dem, de har i Tankerne, men hine, med hvilke de har Lighed. De gør saaledes deres Slutninger for selve Kvadratets og selve Diagonalens Skyld, ikke for dens Skyld, som de tegner, og ligesaa med andet: selve det, som de former og tegner, hvoraf der gives baade Skygger og Afspejlinger i Vand, bruger de som Billeder, men de tragter efter at se selve det, som man kun kan se med Forstanden.

[1]) Citaterne er efter Burnet's Udgave. I den danske Gengivelse havde jeg her og i det følgende først benyttet C. J. Heise: Platons Stat, Kjøbenhavn 1851, og Platons Timæos, Kjøbenhavn 1855; men Prof. Heiberg har velvillig meddelt mig adskillige vigtige Berigtigelser af denne.

(511 a 2.) *Τοῦτο τοίνυν νοητὸν μὲν τὸ εἶδος ἔλεγον, ὑποθέσεσι δ' ἀναγκαζομένην ψυχὴν χρῆσθαι περὶ τὴν ζήτησιν αὐτοῦ, οὐκ ἐπ' ἀρχὴν ἰοῦσαν, ὡς οὐ δυναμένην τῶν ὑποθέσεων ἀνωτέρω ἐκβαίνειν, εἰκόσι δὲ χρωμένην αὐτοῖς τοῖς ὑπὸ τῶν κάτω ἀπεικασθεῖσιν καὶ ἐκείνοις πρὸς ἐκεῖνα ὡς ἐναργέσι δεδοξασμένοις τε καὶ τετιμημένοις.*

Denne Art betegner de altsaa som Genstand for Tanken, men Sjælen er ved Undersøgelsen deraf nødt til at betjene sig af Forudsætninger, uden at gaa til den første Grund (thi den kan ikke gaa ud over disse Forudsætninger), og den bruger som Billeder selve de Ting, hvoraf der gives Billeder i den lavere Sphære, og som i Forhold til disse er anerkendte og agtede som haandgribelige.

Ved den følgende Replik i den anvendte Dialogform bekræftes, at der særlig tales om Geometrien. Om de i denne brugte Figurer siges altsaa, at de tegnede Figurer kun er Symboler paa de geometriske Figurer, hvis Egenskaber man i Virkeligheden udleder af de om dem gjorte Forudsætninger. Derved egner de sig ogsaa til at anvendes som Symboler ved Behandlingen af Størrelser i Almindelighed.

Netop paa denne Anvendelse maa Platon tænke, naar han i „Timaios“ siger:

(32 a 7.) *εἰ μὲν οὖν ἐπίπεδον μέν, βάθος δὲ μηδὲν ἔχον ἔδει γίγνεσθαι τὸ τοῦ παντὸς σῶμα, μία μεσότης ἂν ἐξήρκει τά τε μεθ' αὑτῆς συνδεῖν καὶ ἑαυτήν, νῦν δὲ στερεοειδῆ γὰρ αὐτὸν προσῆκεν εἶναι, τὰ δὲ στερεὰ μία μὲν οὐδέποτε, δύο δὲ ἀεὶ μεσότητες συναρμόττουσιν. οὕτω δὴ πυρός τε καὶ γῆς ὕδωρ ἀέρα τε ὁ θεὸς ἐν μέσῳ θείς, καὶ πρὸς ἄλληλα καθ' ὅσον ἦν δυνατὸν ἀνὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἀπεργασάμενος, ὅτιπερ πῦρ πρὸς ἀέρα, τοῦτο ἀέρα πρὸς ὕδωρ, καὶ ὅτι ἀὴρ πρὸς ὕδωρ, ὕδωρ πρὸς γῆν. . .*

Hvis nu Alverdenens Legeme skulde være en Plan uden Dybde, saa vilde én Mellemproportional have været tilstrækkelig til at forbinde de andre Led og sig selv. Men da det skulde have det rumliges Beskaffenhed, og det rumlige aldrig forbindes ved én, men ved to Mellemproportionaler, har Gud imellem Ild og Jord sat Vand og Luft og saa vidt muligt bragt dem i samme Forhold til hinanden, saaledes at Ilden forholder sig til Luften som Luften til Vandet, og som Luften til Vandet saaledes Vandet til Jorden.

Vi kan her se bort fra den vilkaarlige Anvendelse af geometriske Proportioner, ligeledes fra at Platon ikke helt kan løsrive sig fra det, som dog kun vedkommer den geometriske Symbolik; han fastholder den vel netop, fordi selve den abstrakte Betragtnings Gyldighed er saa nøje knyttet til denne; men allerede mod de rent mathematiske Paastande har Proklos[1]) indvendt, at der ogsaa existerer to Mellem-

[1]) I en Note S. 184 ff. til hans her citerede Oversættelse mener Heise, som anfører Proklos' Indvending, i Tilslutning til flere ældre Forff. at komme ud over den her berørte Vanskelighed ved den Antagelse, at Platon kræver, at ogsaa Forholdene mellem de indskudte Tal skal være rationale, altsaa ogsaa Forhold mellem hele Tal. Om en saadan Fordring siger Platon ikke et Ord; men, som vi viser ovenfor, stemmer hans Ord med den Fremstilling af Forhold ved geometriske Symboler, som tværtimod bliver uafhængig af, om de Størrelser, vi har kaldt a og b, er kommensurable og Forholdene altsaa rationale. Det var vel først paa Platon's Tid, at Eudoxos gav en arithmetisk-algebraisk Forklaring af, hvad Proportionerne i saa Fald betyder; men Fremstillingen brugtes i det mindste siden Hippokrates uafhængig heraf.

proportionaler mellem to Flader og én mellem to Rum. Herom turde man dog paa PLATON's Tid have vidst lige saa god Besked som paa PROKLOS'; men PLATON's Paastand om den mathematiske Forbindelse mellem to Størrelser og én eller to Mellemproportionaler er fuldt forstaaelig, naar man tænker paa den vedtagne Fremstilling af disse ved geometriske Symboler, en Fremstilling, som f. Ex. allerede ligger til Grund for HIPPOKRATES' Reduktion af Terningens Fordobling til Konstruktionen af to Mellemproportionaler. Forholdet mellem to paa hinanden følgende Led i de sammenhængende Proportioner skal nemlig fremstilles som Forholdet $a:b$ mellem to Linier. Da bliver Forholdene mellem Leddene i sammenhængende Proportioner med 3 eller 4 Led fremstillede ved

$$a^2 : ab : b^2$$

og

$$a^3 : a^2b : ab^2 : b^3$$

altsaa henholdsvis som Forhold mellem Flader eller Legemer, saaledes som PLATON siger.

Endnu skal vi bemærke, at naar PLATON i VI. Bog af Staten noget før de Uddrag, vi her har anført, taler om Sofisterne, der i deres Undervisning for Betaling lærer Folk, hvad de helst vil høre, og ikke, hvad der i sig selv er sandt, godt og skønt, gælder dette aabenbart ogsaa om deres Mathematikundervisning. Denne har altsaa navnlig angaaet, hvad Eleverne kunde faa Brug for i Livet, og hvad de intuitivt kunde tilegne sig uden Anstrengelse af Forstanden, og saaledes endnu ikke haft eller tilstræbt de Fortrin, som PLATON priser. Under disse Omstændigheder har Sofisterne i deres Mathematikundervisning haft mere Anledning til rent overfladiske Begrundelser end til „Sofismer“ i Betydning af Spidsfindigheder. Saadanne er ialt Fald først — tildels i Form af mere eller mindre gode Vittigheder — fremkomne som Svar paa de platoniske Mathematikeres skarpsindige Kritik af deres egne mere overfladiske Betragtninger. Det er nemlig saadanne, som tillægges de Mathematikere, der betegnes som Sofister (Oversigt 1913 S. 440). Den ret udbredte Opfattelse, at den rationelle Bevisførelse skulde være fremkommen som Værn mod sofistiske Angreb, har næppe meget paa sig; Sofisterne har nærmest tjent som Exempel paa den ældre uvidenskabelige Overfladiskhed, hvorover PLATON's Disciple var ifærd med at hæve sig.[1])

Vi vender os nu til VII. Bog af „Staten“, hvor PLATON mere direkte omtaler, hvad de vordende Vogtere af hans Stat skal lære af Mathematiken. Han gaar her ud fra dennes pythagoreiske Firdeling, som han dog længere hen finder det fornødent at supplere. Han begynder med Arithmetiken. Hvor langt han vil at man skal gaa tilbage i denne, viser sig af, hvad han siger om Enhed og Flerhed. Forud har han (523 b) karakteriseret de Genstande, som man ikke fuldt ud faar fat paa gennem Sanserne, men som opfordrer til Tænkning saaledes, at dette er

[1]) Herved har jeg ikke regnet ZENON med til Sofisterne; jeg fremhæver netop stadig, hvorledes han med sit skarpe Blik har peget hen paa de Vanskeligheder, som Mathematiken maatte overvinde for at blive exakt Videnskab. At han selv ansaa dem for uovervindelige, er en Ting for sig.

Tilfældet med det, som paa engang fremkalder to hinanden modsatte sanselige Fornemmelser (*τὰ ἐκβαίνοντα εἰς ἐναντίαν αἴσθησιν ἅμα*). I saadanne Tilfælde maa Sjælen kalde Dømmekraft og Forstand til Hjælp for at afgøre, om der er én Ting eller to, hvorom Sanserne meddeler Beretning (*ἐν τοῖς τοιούτοις . . . πειρᾶται λογισμόν τε καὶ νόησιν ψυχὴ παρακαλοῦσα ἐπισκοπεῖν εἴτε ἓν εἴτε δύο ἐστὶν ἕκαστα τῶν εἰσαγγελλομένων* (524 b 3)). Det, der falder i den sanselige Anskuelse tilligemed sin Modsætning, betegnes altsaa som det, der opfordrer til Tænkning (*ἃ μὲν εἰς τὴν αἴσθησιν ἅμα τοῖς ἐναντίοις ἑαυτοῖς ἐμπίπτει, παρακλητικὰ ὁριζόμενος . . . τῆς νοήσεως* (524 d 3)). Platon paapeger nu, at dette finder Anvendelse paa Anskuelsen af Enheden; thi den samme Ting viser sig altid for os baade som en Enhed og en uendelig Mangfoldighed (*ἅμα γὰρ ταὐτὸν ὡς ἕν τε ὁρῶμεν καὶ ὡς ἄπειρα τὸ πλῆθος*) (525 a 4). Han fremhæver saaledes den samme Omstændighed, som i et nyt Skrift om mathematisk Logik [1]) anvendes til at give de først rent formelt opstillede, nøgne Begreber Enhed og Flerhed et frugtbart Indhold.

Om den saaledes opstaaende Talkunst (*τὸ περὶ τοὺς λογισμοὺς μάθημα*), der dyrkes for Erkendelsens Skyld (*τοῦ γνωρίζειν ἕνεκα*) siges videre, at

(525 d 5) *Τοῦτό γε . . . σφόδρα ἄνω ποι ἄγει τὴν ψυχὴν καὶ περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν ἀναγκάζει διαλέγεσθαι, οὐδαμῇ ἀποδεχόμενον ἐάν τις αὐτῇ ὁρατὰ ἢ ἁπτὰ σώματα ἔχοντας ἀριθμοὺς προτεινόμενος διαλέγηται. οἶσθα γάρ που τοὺς περὶ ταῦτα δεινοὺς αὖ ὡς, ἐάν τις αὐτὸ τὸ ἓν ἐπιχειρῇ τῷ λόγῳ τέμνειν, καταγελῶσί τε καὶ οὐκ ἀποδέχονται, ἀλλ' ἐὰν σὺ κερματίζῃς αὐτό, ἐκεῖνοι πολλαπλασιοῦσιν, εὐλαβούμενοι μή ποτε φανῇ τὸ ἓν μὴ ἓν ἀλλὰ πολλὰ μόρια.* —

(526 a). *Τί οὖν οἴει, . . . εἴ τις ἔροιτο αὐτούς· „Ὦ θαυμάσιοι, περὶ ποίων ἀριθμῶν διαλέγεσθε, ἐν οἷς τὸ ἓν οἷον ὑμεῖς ἀξιοῦτέ ἐστιν, ἴσον τε ἕκαστον πᾶν παντὶ καὶ οὐδὲ σμικρὸν διαφέρον, μόριόν τε ἔχον ἐν ἑαυτῷ οὐδέν;"* — — *Περὶ τούτων λέγουσιν ὧν διανοηθῆναι μόνον ἐγχωρεῖ, ἄλλως δ' ουδαμῶς μεταχειρίζεσθαι δυνατόν.* — — — — *τῷ ὄντι ἀναγκαῖον ἡμῖν κινδυνεύει εἶναι τὸ μάθημα, ἐπειδὴ φαίνεταί γε προσαναγκάζον αὐτῇ τῇ νοήσει χρῆσθαι τὴν ψυχὴν ἐπ' αὐτὴν τὴν ἀλήθειαν.*

den hæver Sjælen og nøder den til at tænke over Tallene selv og er aldrig tilfreds med, at man i Tænkningen bruger Tal, der har synlige eller haandgribelige Legemer. Thi Du ved dog, at de, der er kyndige i denne Kunst, ler ad En, naar man i Diskussionen forsøger at dele Enheden selv, og ikke vil lade det gælde, men at de, naar Du skærer den i Stykker, (istedetfor) multiplicerer den af Frygt for, at Enheden nogensinde skal optræde ikke som Enhed, men som Mangfoldighed. — — Naar man nu spørger dem: I forunderlige Mennesker, hvad er det for Tal, I taler om, hvori der findes saadanne Enheder, som I antager, der alle hver for sig er lige indbyrdes uden mindste Forskel, og ingen Dele indeholder? (svarer de): de taler om Tal, der kun kan tænkes og ikke behandles paa nogen anden Maade — — —; denne Kundskab synes virkelig at være nødvendig for os, da den aabenbart nøder Sjælen til at bruge den rene Tænkning for at komme i Besiddelse af den rene Sandhed.

[1]) Th. Brodén: Om begreppens dialektiska uprinnelse. Lund 1915.

Skønt vi mere kommer til at beskæftige os med Geometrien, faar dette Stykke om Arithmetiken ikke ringe Betydning for os, fordi Skildringen af det rene Talbegreb tillige tjener til Prøve paa det Krav paa Renhed, som ogsaa skal stilles til de geometriske Begreber; thi ogsaa for Geometriens Vedkommende lægges der fra PLATON's Tid af an paa, gennem „den rene Tænkning at komme i Besiddelse af den rene Sandhed."

PLATON's Ord yder et Bidrag til den rette Forstaaelse af EUKLID's arithmetiske Bøger og vil da i Forening med dem vise, hvor vidt man allerede paa PLATON's Tid maa være kommen i Retning af det samme Talbegreb, som EUKLID gaar ud fra. Det maa da fremhæves, at dette Begreb om Enhed og derved om Tal, som efter PLATON ikke tør anvendes paa benævnte Tal og i Sammenhæng dermed heller ikke tilsteder Brøkdannelse, er forskelligt fra det, som vi nu gaar ud fra. Vi taler vel ogsaa om rene eller ubenævnte Tal, deriblandt først Enheden og de hele Tal. Operationer med dem frembyder for os den Fordel, at de bliver anvendelige, hvilken Benævning man end derefter giver Tallene. Vi kan da ogsaa „skære Enheden i et Antal lige store Stykker" og tage dem til ny Enhed og derved faa Brøker. For de Mathematikere, som PLATON omtaler, og for EUKLID er derimod Enheden og dermed de øvrige hele Tal Regnesymboler, med hvilke der opereres efter bestemte Regler, og først disse lærer, hvad Enhed og Tal er, idet man faar at vide, hvad de bruges til. Derfor kan EUKLID's Definition paa Enhed ikke sige andet, end at det er et Begreb, som man vil faa Brug for. EUKLID VII, Def. 1 siger: *Μονάς ἐστιν, καθ᾽ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται* (Enheden er det, efter hvilket hver enkelt Ting kaldes én), og Def. 2, at et Tal er den Mængde, som bestaar af Enheder, altsaa hvad vi nu kalder et helt Tal.

Definitionen paa Tal giver allerede Anvisning paa Tælling som den første Taloperation og som Middel til at sammenligne, addere og subtrahere dem; men Reglerne for de øvrige Operationer gives i Proportionslæren, i hvilken man i Virkeligheden opnaar det samme, som vi nu opnaar ved Brug af Brøker. Herpaa peger ogsaa PLATON, naar han siger, at Mathematikerne, naar man vil skære Enheden i Stykker (f. Ex. dele den i 5 ligestore Dele og tage 3, altsaa danne Brøken $\frac{3}{5}$), strax mangfoldiggør den (hvad man gør, naar man lader to Størrelser forholde sig som Tallene 3 til 5). Hans Bemærkning viser iøvrigt, at Tanken om en Deling, altsaa om Brøkdannelse, ikke har ligget ham fjernt; vi ved ogsaa, at man i den græske Logistik brugte de fra Ægypten arvede Stambrøker (Brøker med Tælleren 1). PLATON vil netop fremhæve, at Mathematikerne tager Afstand fra Brøkdannelse, saa vel som fra enhver Brug af benævnte Tal, der selvfølgelig var den Forbindelse, hvori Tal brugtes i det daglige Liv. Her er altsaa Tale om et valgt og villet System, som Mathematikerne lagde til Grund for en exakt og rationel Behandling, og det er det samme, som for Arithmetikens Vedkommende findes hos EUKLID. Forberedt er dog naturligvis dette System ved Pythagoreernes praktiske Anvendelse af Forhold og Proportioner. Denne er vistnok ogsaa fortsat i den græske Logistik, og at den hævdedes i den videnskabelige Behandling, turde have været medvirkende til, at almindelige Brøker længe ikke anvendtes i den græske Regnekunst.

Det ligger nær at antage, at et saadant Valg af den udelelige Enhed og en rationel Behandling med dette Udgangspunkt maa skyldes en enkelt Mand. Da nu, som vist i Oversigt 1910, Beviset for den Theaitet tillagte Sætning i Euklid X, 9 om Irrationalitet af Rodstørrelser findes i Euklid VII—VIII, og da Behandlingen i disse netop har dette Udgangspunkt, ligger det nær at antage, at det er den af Platon saa højt skattede Theaitet, paa hvem han her særlig tænker, naar han taler om, hvad de, der er kyndige i den Kunst, siger. Under disse Omstændigheder vil de Hovedtræk i den strengt rationelle Undersøgelse i Euklid VII, som maatte skyldes Theaitet, have vakt Platon's Opmærksomhed for Muligheden og Ønskeligheden af en lige saa gennemført rationel Behandling af den hele Mathematik, som han lægger saa stor Vægt paa. Maaske havde ogsaa Eudoxos allerede da vist, hvorledes Brugen af Forhold og Proportioner ligeledes egnede sig til at danne en almindelig Størrelseslære, som ogsaa omfatter irrationale Størrelser.

Ved Omtalen af Geometrien kommer Platon tilbage til Anvendelse af Figurer og Operationer med disse som Symboler paa exakt bestemte Begreber og Operationer med disse. Efterfølgere af ham raillere over Anvendelsen af Ordet „Geometri“, som umiddelbart betyder praktisk Laandmaaling. Selv siger han:

(527 a). *ὅτι αὕτη ἡ ἐπιστήμη πᾶν τοὐναντίον ἔχει τοῖς ἐν αὐτῇ λόγοις λεγομένοις ὑπὸ τῶν μεταχειριζομένων. — Λέγουσι μέν που μάλα γελοίως τε καὶ ἀναγκαίως· ὡς γὰρ πράττοντές τε καὶ πράξεως ἕνεκα πάντας τοὺς λόγους ποιούμενοι λέγουσιν τετραγωνίζειν τε καὶ παρατείνειν καὶ προστιθέναι καὶ πάντα οὕτω φθεγγόμενοι, τὸ δ᾽ἔστι που πᾶν τὸ μάθημα γνώσεως ἕνεκα ἐπιτηδευόμενον . . . . ὡρτοῦ ἀεὶ ὄντος γνώσεως, ἀλλὰ οὐ τοῦ ποτέ τι γιγνομένου καὶ ἀπολλυμένου.*

at denne Videnskabs sande Væsen staar i en bestemt Modsætning til det Sprog, som de fører, der beskæftiger sig med den. — Deres Sprog er ganske komisk og praktisk. Naar de taler om at kvadrere, lægge henad, lægge til og bruger lutter lignende Udtryk, skulde man tro, at de havde en Forretning i Livet, og at denne Forretning var Hovedsagen, skønt jo dog hele Videnskaben gaar ud paa Erkendelse . . . . Erkendelse gælder det altid værende, ikke det, der opринder og forgaar i Tiden.

De her og i VI Bog udtalte og antydede Fordringer til Geometrien svarer ganske til, hvad vi virkelig finder realiseret hos Euklid. Det samme maa Geometrien altsaa, da Platon skrev „Staten“, i det mindste have været paa Vej til at opnaa, samtidig med at hans Ord har været en kraftig Opfordring til at gaa videre ad denne Vej.

Helt anderledes forholder det sig med Stereometrien, som Platon vil have indskudt som Nr. 3 mellem Pythagoreernes mathematiske Videnskaber: Arithmetik, Geometri, Astronomi (Sfærik) og Musik. Han har allerede begyndt at tale om Astronomien, da han synes at komme i Tanke om, at der mangler noget, som bør følge umiddelbart efter Læren om plane Figurer. Fra dem burde man ikke umiddelbart gaa videre ved at tage

(528 a 9.) *ἐν περιφορᾷ ὂν ἤδη στερεὸν λαβόντες, πρὶν αὐτὸ καθ᾽αὑτὸ λαβεῖν· ὀρθῶς δὲ ἔχει ἑξῆς μετὰ δευτέραν αὔξην τρίτην λαμβάνειν. ἔστι δὲ που τοῦτο περὶ τὴν τῶν κύβων αὔξην καὶ τὸ βάθους μετέχον.*

Rumfigurer i deres Bevægelse, førend vi har betragtet dem i og for sig selv. Det rigtige er efter den anden Udstrækning at gaa over til den tredje, jeg mener nemlig Kubernes Udstrækning og alt, hvad der har Dybde.

Til den Bemærkning, at en saadan Videnskab endnu ikke synes at være funden, svares:

Διττὰ γάρ . . . τὰ αἴτια· ὅτι τε οὐδεμία πόλις ἐντίμως αὐτὰ ἔχει, ἀσθενῶς ζητεῖται χαλεπὰ ὄντα, ἐπιστάτου τε δέονται οἱ ζητοῦντες, ἄνευ οὗ οὐκ ἂν εὕροιεν, ὃν πρῶτον μὲν γενέσθαι χαλεπόν, ἔπειτα καὶ γενομένου, ὡς νῦν ἔχει, οὐκ ἂν πείθοιντο οἱ περὶ ταῦτα ζητητικοὶ μεγαλοφρονούμενοι. εἰ δὲ πόλις ὅλη συνεπιστατοῖ ἐντίμως ἄγουσα αὐτά, οὗτοί τε ἂν πείθοιντο καὶ συνεχῶς τε ἂν καὶ ἐντόνως ζητούμενα ἐκφανῆ γένοιτο ὅπῃ ἔχει· ἐπεὶ καὶ νῦν ὑπὸ τῶν πολλῶν ἀτιμαζόμενα καὶ κολουόμενα, ὑπὸ δὲ τῶν ζητούντων λόγον οὐκ ἐχόντων καθ᾽ὅτι χρήσιμα, ὅμως πρὸς ἅπαντα ταῦτα βίᾳ ὑπὸ χάριτος αὐξάνεται, καὶ οὐδὲν θαυμαστὸν αὐτὰ φανῆναι.

Og det af to Aarsager. Den første er, at fordi ingen Stat holder denne Videnskab i Ære, bliver den ikke drevet med Kraft, vanskelig som den er; den anden er, at de, der forsker i den, behøver en Anfører, uden hvilken de vel næppe vil finde, hvad de søger. Men for det første vil en saadan vanskelig træde frem, og dernæst, selv om han kom, vilde, som Sagerne nu staar, de, der er beskæftigede med disse Undersøgelser, af Indbildskhed ikke følge ham. Men dersom en hel Stat værdigede Sagen sin Omsorg og holdt den i Ære, saa vilde baade disse følge, og ved vedholdende og anspændt Forskning vilde Videnskaben opklares efter sin sande Beskaffenhed. Thi ogsaa nu, skønt den ringeagtes og undertrykkes af Mængden og af de Forskende selv, da de ikke indser, hvortil den nytter, gaar den dog til Trods for alt dette frem ved sin ejendommelige Ynde, og det skulde ikke undre mig, om den engang vil komme for Lyset.

Disse Ytringer vil i Øjeblikket forbavse den, der ved, hvor vidt Stereometrien var kommen paa PLATON's Tid, ja længe forud. Astronomien, som af Pythagoreerne kaldes Sfærik, var knyttet til Behandlingen af Kuglen og dennes for Astronomien vigtigste Storcirkler. At faa rigtig fat paa dem, deres Skæring og indbyrdes Beliggenhed, og at gøre de Fremskridt i Opfattelsen af Himmellegemernes Bevægelse, som gik forud for PLATON's Tid, har krævet en ret udviklet Rumanskuelse. Denne udvikledes ogsaa ved Brug af Gnomon og Solure, hvis Konstruktion knyttedes til

Projektion paa faste Planer, som allerede Ægypterne har brugt i deres Bygningstegninger. Det fremgaar imidlertid af Begyndelsen af de citerede Ord, at PLATON netop paa Grund af denne Brug af Stereometrien vil have, at der forud for Astronomien skal gaa et selvstændigt Studium af denne Videnskab, et Studium, der da maa bygges paa de samme exakte Principer som Plangeometrien.

Det er ogsaa berørt, at man paa PLATON's Tid kendte de 5 regulære Polyedre, et Kendskab, der delvis skrev sig fra Pythagoreerne. Det er det Emne, hvormed EUKLID's Elementer ender, men i en Skikkelse, som sikkert naar videre end den, hvori PLATON kendte det, og som i det hele stemmer med de Grundsætninger, som han gør sig til Talsmand for. Der løses nemlig for alle Polyedrene den Opgave at indskrive dem i en given Kugle; dermed føres dels et Bevis for deres Existens, dels er den løste Opgave den geometriske Algebras Form for den, der nu gaar ud paa at give algebraiske Udtryk for Kanterne, naar den omskrevne Kugles Radius eller Diameter er given. Et Arbejde i den Retning var dog vistnok alt paabegyndt af THEAITET.

Ligeledes har EUDOXOS vistnok uafhængig af PLATON's Opfordring fundet sin Formulering af infinitesimale Bestemmelser, som indenfor Stereometrien tillod ham at føre exakte Beviser for de af DEMOKRIT fundne Bestemmelser af Pyramidens og Keglens Rumfang. Begge disse Fremskridt viser imidlertid baade, at Stereometrien var kommen ret vidt, og at den gjorde vigtige Fremskridt netop paa PLATON's Tid, saa her ikke synes at have været Grund til Klage.

Hvad der blandt stereometriske Fremskridt mest maatte interessere PLATON, er dog vistnok den Udvidelse af den geometriske Algebra, som knytter sig til Stereometrien, idet en Fordring, som vi nu vilde udtrykke ved en Ligning af tredje Grad mellem Størrelser fremstillede ved rette Liniestykker, fremstilles som en Relation mellem retvinklede Parallelepipeder (og Kuber). Vi har saaledes nævnt hans Omtale i „Timaios“ af den simpleste Opgave af denne Art, Terningens Multiplikation $x^3 = a^2 b$ og den dermed identiske Bestemmelse af to Mellemproportionaler. Denne beskæftigede Mænd, som stod PLATON nær. ARCHYTAS havde løst den ved en Anvendelse af Flader og en Rumkurve, der i sig selv røber stor stereometrisk Færdighed; EUDOXOS anvendte nogle plane Kurver, hans og PLATON's Discipel MENAICHMOS Keglesnit. Det vilde ikke være urimeligt at antage, at PLATON's Ønsker om Stereometriens Fremme særlig kunde gælde saadanne Bestræbelser. Forskelligheden i de gjorte Forsøg, blandt hvilke han dog næppe har kendt MENAICHMOS', kan da have fremkaldt Ønsket om en „Anfører“, der kunde opstille en Normalløsning. Ukendt med de dermed forbundne Vanskeligheder, kan han endog have tænkt paa en saadan, som omfatter alle Ligninger af 3. Grad paa samme Maade, som de allerede kendte Fladeanlæg omfatter dem af 2. Grad. Hans sidst anførte Ord kunde da tolkes som et Udtryk for dette Haab.

Selv om PLATON tillige har næret saadanne Ønsker, er der dog en Ting, hvorpaa han, efter hvad der forud var sagt om Arithmetik og Geometri, maatte lægge særlig Vægt, nemlig et ligesaa fast Grundlag for Stereometrien som rationel Videnskab som det, hvorfor han allerede havde berømmet den øvrige Mathematik. I en saaledes grundlagt og rationelt gennemført Behandling vilde han ogsaa se den sikreste Vej til den Udvidelse, som han efter vore foregaaende Bemærkninger kan have ønsket.

Med denne Forklaring forekommer det mig, at de anførte Ytringer — ogsaa de, for hvilke vi har nævnt en anden Forklaring som mulig — bedst stemmer. Havde Talen været om Udførelsen af nye stereometriske Undersøgelser, vilde det navnlig gælde om, at hver enkelt Forsker gjorde et godt Arbejde, og ikke om, at han fulgte en Anfører nøjagtig. En Banebryder paa et eller andet Omraade giver vel ogsaa andre god Vejledning og aabner nye Adgange for dem; men disse udnyttes bedst af den, der mere selvstændig benytter dem og sætter egne Kræfter ind paa at komme videre. Anderledes gaar det ved den systematiske Opførelse af en Lærebygning. Det i en saadan fulgte System har nemlig altid noget vilkaarligt ved sig, saaledes Valget af Udgangspunkter og Symboler. Der kan være to eller flere Sandheder, hvoraf det er nødvendigt at postulere en, hvorefter de andre kan bevises; men Valget af den, som skal postuleres, kan være vilkaarligt. Det var netop den Vilkaarlighed, som ligger i Valget af det Talbegreb, som man opstiller og lægger til Grund for Arithmetiken, der nys bragte os til at antage, at de græske Mathematikere paa dette Omraade havde sluttet sig til en „Anfører" — vi formodede, at det var Theaitet. Platon kan have ønsket en lignende Fører ved Dannelsen af et exakt Grundlag for Stereometrien.

Sigter hans Bemærkninger hertil, kan det imidlertid ikke undre os, at, som vi ser af de anførte Ord, Platon ikke fandt megen Lydhørhed hos dem, der var optagne af at arbejde paa Stereometriens positive Fremskridt. Saadanne drager ikke sjelden Opmærksomheden bort fra det mere formelle systematiske Arbejde, og dertil var der saa meget mere Anledning her, som den nødvendige logiske Sikkerhed i stereometriske Undersøgelser kunde vindes ved at føre dem tilbage til plangeometriske Udgangspunkter. Her tog da hver Forsker, hvad han netop havde Brug for uden at underordne sig en enkelt Fører. Ved den endelige Opførelse af en samlet geometrisk Lærebygning blev Platon's Opfordringer dog respekterede; men den, som vi finder hos Euklid, bærer dog endnu Præget af, at den deri indeholdte Stereometri er føjet til en næsten færdig langt mere udviklet Plangeometri. Hertil skal vi komme tilbage i XIV. Kapitel.

Ogsaa Astronomi og Musik vil Platon have dyrket, ikke af Hensyn til de nyttige praktiske Anvendelser, men med Henblik paa Værdien af den den derved vundne Viden og Forstaaen. Astronomi (Sfærik) og Musik indeholdt forøvrigt paa den Tid ikke alene Anvendelser af Mathematiken, men tillige selve de dertil nærmest tjenende Dele af henholdsvis Stereometri og Arithmetik.

For Astronomiens Vedkommende saa vi nys, at Platon ønskede det rent rumlige henvist til Stereometrien; men ogsaa Læren om Himmellegemernes Bevægelse vilde han paa samme Maade have bygget paa rent rationelle Principer, som den selv opstiller, saaledes at Afvigelser i den virkelige Bevægelse fra de opstillede Love betragtes som uvæsentlige. Han gør saaledes her Astronomien til en rent mathematisk Videnskab. Det samme gælder om Musiken, hvor det endog betegnes som noget latterligt at sætte Ørerne højere end Fornuften! PLATON ser altsaa i denne Sammenhæng bort fra de Erfaringer med Øjne og Ører, med hvilke de Forudsætninger, som man opstiller for Astronomi og Musik, helst skulde bringes i saa nær Overensstemmelse som muligt, hvad man jo netop prøver ved at lægge behørigt Mærke til de Afvigelser fra rationelt opstillede Love, som kan iagttages.

I nærværende Arbejde kan vi imidlertid holde os til, hvad der er udtalt om Arithmetik, Geometri og Stereometri. For Arithmetikens Vedkommende saa vi, at PLATON allerede forefandt det Talbegreb, som senere EUKLID gaar ud fra, og han maa have kendt den Maade, hvorpaa THEAITET byggede videre herpaa, og som vist er den, vi genfinde i EUKLID VII. Paa andre Punkter var man næppe da kommen saa vidt. Dels fremgaar ikke noget saadant af hans mere almindelig holdte Bemærkninger, dels kan f. Eks. hans S. 13 (211) anførte Udtalelse om de tre Slags Vinkler, ɔ: spidse, rette, stumpe, at disse Begreber selv ikke trænger til nærmere Forklaring, tyde paa, at han — som vi senere skal se ogsaa om en filosofisk Nutidsforfatter — nøjes med en rent intuitiv Skelnen mellem disse uden at tænke paa Nødvendigheden af bestemt at formulere Skelnemærket.

Hans Bemærkninger om Geometrien som rationel Videnskab peger imidlertid tydelig hen paa de Krav, den skulde opfylde for virkelig at være det. Naar nu de Mathematikere, som sluttede sig til ham, dog bemærkede, at der paa mange Punkter maatte gaas længere tilbage for at opfylde dem, maatte PLATON's Udtalelser her, saa vel som sikkert mange tidligere mundtlige Udtalelser, netop være dem en kraftig Opfordring til et virksomt Arbejde paa at realisere det af PLATON opstillede Ideal. At der i Plangeometrien allerede var naaet saa meget, at PLATON selv her ikke finder Grund til Klage, kan for en Del være sket i Henhold til tidligere mundtlig Opfordringer fra ham i samme Retning. For Stereometrien kræver ogsaa han et helt nyt Arbejde af denne Art.

Arbejdet paa for hele Mathematikens Vedkommende og langt fuldstændigere, end det var naaet paa PLATON's egen Tid, at virkeliggøre de af ham opstillede Idealer, fortsattes nu fra PLATON til EUKLID, hvorefter man blev staaende ved den Virkeliggørelse, som er givet i dennes Elementer. Dette Synspunkt giver det bedste Middel til fuldtud at forstaa disse. Rigtigheden af selve det, som EUKLID siger, kræver vel ingenlunde en saadan Forklaring; netop ved den rationelle Behandling træder denne af sig selv frem paa ethvert Punkt. At han har haft de af PLATON skildrede Maal for Øje, giver derimod Forklaring paa, hvorfor han netop er gaaet de Veje, han har valgt for at opnaa denne Sikkerhed. Meget, som i første Øjeblik synes tilfældigt, træder nu frem som villet og tilsigtet. Lige saa vel som de, der i vore Dage undersøger Geometriens Forudsætninger, tilsigter EUKLID ved dem, som han opstiller, at definere og afgrænse det Omraade, indenfor hvilket han drager sine Slutninger. Over 2000 Aar efter kan man vel paavise Steder, hvor det ikke ganske lykkes ham at naa dette Maal, som PLATON havde peget hen paa.

Hvorledes han dog i det mindste har haft det for Øje, skal jeg i flere af de følgende Kapitler søge at paavise og derved tillige at bidrage til en bedre Forstaaelse af EUKLID's berømte Værk.

Kap. IV.

Den „analytiske Methode"; „Elementer".

Her rejser sig nu det Spørgsmaal, om PLATON selv paa anden Maade end ved saadanne almindelig holdte Udtalelser som dem, vi her har anført, har bidraget til at give Geometrien, og dermed den i geometrisk Form iklædte Algebra, en saadan ideel Skikkelse som den, vi træffer hos EUKLID. Det er ikke om en Udvidelse af den geometriske Viden her er Tale, men om en Overgang fra en mere intuitiv Tilegnelse af denne til en sammenhængende rationel Begrundelse, som gaar ud fra de allerenkleste Forudsætninger. Det er netop disse og den Maade, hvorpaa den mere intuitive Viden er sammensat eller dog lader sig sammensætte af dem, som man ikke har gjort sig Rede for under den intuitive Tilegnelse. Spørgsmaalet derom var imidlertid forlængst rejst ved Opdagelsen af irrationale Størrelser, og dets Behandling var paa dette Omraade efterhaanden naaet til en vis Fuldkommenhed (se Oversigt 1910 og 1915). Efter Opdagelsen af, at $\sqrt{2}$ er irrational, laa det straks nær intuitivt at antage, at Kvadratrødderne af andre Ikke-Kvadrattal ogsaa maatte være det; men dette Spørgsmaal, hvis Interesse er rent rationel, maatte kræve en rationel Besvarelse. Den negative Bestemmelse: irrational, blev ført tilbage til Bestemmelsen: inkommensurable Størrelser, som vel formelt ogsaa er negativ; men der lader sig dog opstille en Regel for, ved Anvendelse af Bestemmelsen af største fælles Maal, at prøve, om Størrelser er kommensurable eller inkommensurable. Det er ikke svært at paavise Irrationalitet af Rodstørrelser, naar man først kan gaa ud fra, at et Primtal ikke kan gaa op i et Produkt uden at gaa op i en af Faktorerne. Dette sidste vil vel ingen nægte, som har nogen Fortrolighed med Talbehandling; men han kommer i Forlegenhed, naar man spørger: hvorfor. Her er altsaa i Virkeligheden kun Tale om en intuitiv Viden; en rationel Besvarelse faas først, naar man gaar tilbage til et klart opstillet Talbegreb. Saaledes maa THEAITET være kommen til det Talbegreb, som PLATON tillægger Mathematikerne. Gaaende ud fra dette og den Operation, som bruges ved Bestemmelse af største fælles Maal, har han dernæst bevist den nævnte Sætning og dermed de antagne Sætninger om Rationalitet og Irrationalitet.

De her beskrevne Betragtninger udgør den ved THEAITET og hans Forgængere udførte Analyse af de Sætninger, som skulde prøves, efterfulgt af en Synthese, som fra de Forudsætninger, hvortil man var naaet tilbage, førte til de Resultater, som man i dette Tilfælde vistnok fra det Øjeblik, man havde opdaget, at der existerer irrationale Størrelser, maatte have været tilbøjelig til at antage. Disse Operationer er vistnok bragte til Afslutning af Theaitet uden nogen direkte Medvirkning af Platon, om end dennes Bifald af hans rationelle Behandling kan have ydet Theaitet en stor Støtte under hans Bestræbelser. Men derefter har Platon kunnet støtte sine Opfordringer til at stræbe at naa lige saa vidt paa Mathematikens andre Omraader ved en Henvisning til, hvad der var naaet paa det her nævnte, og til, hvorledes det var naaet. At han har gjort det, derpaa tyder den Omstændighed, at Brugen af den analytiske Methode i Oldtiden jævnlig tillægges Platon, uden at man just i hans Skrifter finder nærmere herom eller de dertil hørende Kunstord, og den, at Dannelsen af de Former, under hvilke Methoden optræder hos de græske Mathematikere, gaar tilbage til Platon's nærmeste Efterfølgere.

Vi skal nu foreløbig se, at den Brug af den analytiske Methode, som vi her tilskriver Platon's Tilskyndelser, stemmer overens med de Udtalelser om denne Methode, som er bevarede hos Oldtidens Forfattere. Herom giver Pappos (Hultsch's Udgave p. 634,11—636,14) følgende Oplysninger:

Ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ἐπί τι ὁμολογούμενον συνθέσει· ἐν μὲν γὰρ τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες καταντήσωμεν εἴς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων· καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη καὶ ἑπόμενα τὰ ἐκεῖ ἐνταῦθα προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν.

Analysen er Vejen fra det søgte som indrømmet gennem det, som videre følger deraf, til det, som er indrømmet i Synthesen; thi idet vi i Analysen betragter det, som søges, som allerede blevet til, undersøger vi det, hvoraf dette fremgaar, og videre det, som ligger endnu længere tilbage, indtil vi under denne Tilbagegang støder paa noget, som allerede er bekendt eller regnes med til Grundlaget (Forudsætningerne); og en saadan Methode, kalder vi Analyse, en Slags baglænds Løsning (Lysis). I Synthesen derimod stiller vi omvendt det, som vi i Analysen sidst fik fat paa, i Spidsen som allerede blevet til, lader det, som før gik forud, efter Tingenes Natur følge efter, og idet vi føjer Led til Led, naar vi til Tilvejebringelsen af det søgte, og det kalder vi Synthese.

Διττὸν δ'ἐστὶν ἀναλύσεως γένος, τὸ μὲν ζητητικὸν τἀληθοῦς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν, τὸ δὲ ποριστικὸν τοῦ προταθέντος [λέγειν], ὃ καλεῖται προβληματικόν . ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ θεωρητικοῦ

Der er to Slags Analyse; den ene, som gaar ud paa at søge noget rigtigt, kaldes theoretisk, den anden, som gaar ud paa at tilvejebringe noget forlangt, γένους τὸ ζητούμενον ὡς ὂν ὑποθέμενοι καὶ ὡς ἀληθές, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν καὶ ὡς ἔστιν καθ’ ὑπόθεσιν προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον, ἐὰν μὲν ἀληθὲς ᾖ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθὲς ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει, ἐὰν δὲ ψεύδει ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον. ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους τὸ προταθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον, ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προταθέν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει, ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα.[1])

kaldes problematisk. I den theoretiske Analyse forudsætter vi, at det undersøgte virkelig forholder sig saaledes [som det paastaas], derpaa gaar vi Skridt for Skridt gennem det, som videre følger deraf, idet vi forudsætter det som sandt og virkeligt, til en logisk Konsekvens; hvis saa Konsekvensen er rigtig, vil ogsaa det omspurgte være det, og Beviset vil i omvendt Orden svare til Analysen; kommer vi derimod til en urigtig Konsekvens, vil ogsaa det omspurgte være urigtigt. I den problematiske Analyse derimod betragter vi det, som forlanges, som bekendt og gaar derpaa Skridt for Skridt gennem det, der følger deraf som rigtigt, til en logisk Konsekvens; hvis saa denne Konsekvens er mulig og kan tilvejebringes (hvad Mathematikerne kalder „givet“), er ogsaa det forlangte muligt, og atter vil Beviset svare omvendt til Analysen; men hvis man omvendt kommer til en umulig Konsekvens vil ogsaa Opgaven være umulig.

Beskrivelsen af disse to Analyser er tydelig nok; og navnlig vil den negative Anvendelse af den theoretiske Analyse til at bevise Urigtigheden af en Antagelse og Anvendelsen af den problematiske Analyse saavel til at finde Løsningen af en Opgave som til at bevise dens Umulighed til alle Tider være anvendt i mathematiske Undersøgelser. Pythagoreerne har f. Eks. brugt den første til at bevise, at $\sqrt{2}$ ikke er en Brøk, og hvad der overhovedet menes med en eller anden Opgave, forstaas jo først samtidig med, at man tænker den løst. I vore Dage giver man Analysen en bestemt Form ved at kalde en søgt Størrelse x og opstille og løse den Ligning, som udtrykker, at den virkelig tilfredsstiller den opgivne Betingelse. At man ogsaa i Oldtiden var sig Brugen og Betydningen af en Analyse og en dertil knyttet Synthese fuldt bevidst, fremgaar af ovenstaaende Beskrivelse, der netop bliver bestemt og almindelig ved sin Korthed. Forstaaelsen af baade den heuristiske og logiske Værdi af disse Operationer træder endvidere frem i den regelbundne Leddeling af Theoremer og Problemer og den dertil hørende Analyse og Synthese; af disse nøjedes man i en systematisk

[1]) De her brugte Udtryk, særlig δυνατόν og ἀδύνατον, bekræfter den Anskuelse, jeg længe har gjort gældende, og ligeledes i det følgende hævder, at de gamle „Problemer“ særlig gaar ud paa at bevise Muligheden eller Eksistensen af det, som i dem konstrueres.

Fremstilling af en sammenhængende Lære jævnlig med at fremsætte den sidste, da denne indeholder den tilstrækkelige Begrundelse, som Analysen da blot havde tjent til at finde. Alt dette og hvert Leds logiske Betydning er udførlig beskrevet i Hankel: *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter,* saavel som i min Lærebog med samme Emne.

Det kan synes noget underligt, at man har villet tillægge Platon Opfindelsen af en i og for sig saa selvfølgelig Methode som den analytiske, der, som vi har nævnt Eksempler paa, jævnlig har været anvendt før hans Tid; han kan derimod nok have fremdraget, hvad det er, der karakteriserer disse ældre Udledelser af en Begrundelse eller af en Konstruktion, Denne Tilknytning til hans Navn og den derpaa følgende Udformning af Methoden forklares dog bedst ved den store Betydning, som den fik netop for det Formaal, for hvilket Platon gjorde sig til Talsmand, og som satte de samtidige og umiddelbart efterfølgende Mathematikere i Arbejde. Dette Formaal var en Omstøbning af den Samling af geometrisk Viden, hvoraf man alt var i Besiddelse, til en synthetisk Lærebygning.

Dertil krævedes først og fremmest en Anvendelse af den i det citerede Stykke hos Pappos beskrevne Analyse, som dog ganske af sig selv maatte blive en anden end den Erhvervelse af nye Resultater, paa hvilken Pappos nærmest tænker, og som vi ogsaa i Nutiden tænker paa, naar vi anvender den analytiske Methode. Pappos og vi søger at løse de nye Opgaver ved at føre dem tilbage til noget forud bevist eller i sidste Instans til forud opstillede Definitioner og Postulater. Den Gang derimod besad man i ikke ringe Omfang en geometrisk Viden i den færdige og mere sammensatte Skikkelse, hvori netop Intuitionen giver den; det gjaldt da omvendt at finde, hvilke mindre sammensatte, men ikke altid opstillede Sætninger, der ligger til Grund for dem, som man kendte, indtil man kom til Paastande, fra hvilke det er umuligt at naa tilbage til noget endnu simplere. Dette maatte nu udtrykkelig opstilles som Forudsætninger, hvorpaa Lærebygningen kan opføres ved en Bevægelse i modsat Retning.

Her bliver ligesaa vel Brug for den theoretiske Analyse som for den problematiske. Hvad der forelaa paa Platon's Tid, var dels Forestillinger om Figurer, som, om de end oprindelig var vundne ved Intuition, dog allerede var saa klare og og tydelige, at man uden at gribe fejl kunde lægge dem til Grund for rigtige Slutninger, dels et Kendskab til Egenskaber ved saadanne Figurer, i hvis Erhvervelse baade Intuition og Slutninger havde Del. Paa de første maatte man anvende den problematiske Analyse, til man naaede tilbage til de simpleste Forestillinger af samme Art og de første Regler for deres Forbindelse, som man da udtrykte ved Definitioner og Postulater; paa de bekendte Egenskaber anvendte man den theoretiske Analyse, til man kom tilbage dels til den samme Art af Forudsætninger, som netop udtrykker Grundegenskaberne, dels, naar Talen er om Størrelse, til saadanne Forudsætninger, som indeholdes i Euklid's „Almindelige Begreber". Oprindelig havde de nævnte Forestillinger og den omtalte Viden ikke bevidst været byggede paa disse Forudsætninger; men efter paa den Maade at være fundne og udtrykkelig opstillede, danner disse det Materiale, hvoraf EUKLID's Lærebygning derefter synthetisk er opført.

Det er netop dette Billede, som finder Udtryk i Ordene Analyse og Synthese. Ved Analysen opløser eller udstykker man den foreliggende Sætning, som for Problemernes Vedkommende gælder Eksistensen af visse Figurer, for Theoremernes saadanne Figurers Egenskaber, i en Del simplere Sætninger, som i begge Tilfælde kan høre til begge de nævnte Kategorier. Af disse kan man omvendt sammensætte den først forelagte mere indviklede Sætning; dette sker ved Synthese. Den ved Analysen fundne Gruppe af enkelte Sætninger, eller snarere Beviserne for disse, udgør de Elementer (*στοιχεῖα*), hvoraf den forelagte Sætning, eller snarere Beviset for denne, er sammensat. Hver enkelt af de fundne simplere Sætninger lader sig paa lignende Maade opløse, indtil man tilsidst kommer til de Forudsætninger, som under forskellige Benævnelser anføres i Spidsen for den hele synthetiske Lærebygning, og som udgør de „Elementer“, hvoraf alle dens Sætninger (eller Beviser) er sammensatte.

P. TANNERY gør i sin interessante Afhandling: *Sur l'histoire des mots analyse et synthèse en mathématique*[1]) opmærksom paa, at en saadan Brug af Analyse og Synthese som Kunstord ikke findes i PLATON's Skrifter; men de er i den Grad Sprogets naturlige Udtryk for de Operationer, som der er Brug for, naar man vilde give Geometrien den af PLATON priste rationelle Skikkelse, at hans mathematiske Disciple og Efterfølgere ganske naturlig bragtes til af sig selv at anvende disse Ord. Og at man paa, eller dog lige efter hans Tid anvendte Ordet *στοιχεῖα* netop paa Resultatet af den her beskrevne Analyse, fremgaar af et Sted hos ARISTOTELES (Metaph. IV, 3, 1004 a), som TANNERY citerer, og hvor der i det hele gøres Rede for, i hvilke Betydninger Ordet *στοιχεῖα* tages. Efter at have omtalt de materielle Forklaringer af Ordet siger han:

παραπλησίως δὲ καὶ τὰ τῶν διαγραμμάτων στοιχεῖα λέγεται, καὶ ὅλως τὰ τῶν ἀποδείξεων· αἱ γὰρ πρῶται ἀποδείξεις καὶ ἐν πλείοσιν ἀποδείξεσιν ἐνυπάρχουσαι, αὗται στοιχεῖα τῶν ἀποδείξεων λέγονται.	Paa samme Maade siger man „Elementer“ i Geometrien og i Almindelighed i de deduktive Videnskaber; thi de første Beviser, som genfindes i flere andre følgende, kaldes disse Bevisers Elementer.

ARISTOTELES kræver vel en vis Oprindelighed af disse „første Beviser“, naar han bagefter siger, at Elementer skal være smaa, enkelte og udelelige, hvad der kun vilde være Tilfældet med Axiomer (Postulater); men denne Indskrænkning er faldet fuldstændig bort i følgende Forklaring af den samtidige Mathematiker MENAICHMOS, som iøvrigt fastholder den samme Sammenhæng som ARISTOTELES mellem to Sætninger (eller Beviser), naar den ene skal være Element af den anden. Der siges nemlig hos PROKLOS (S. 72,23—73,14):

„Iøvrigt siger man Element paa to Maader (*τὸ στοιχεῖον λέγεται διχῶς*), saaledes

[1]) Atti del Congresso internazionale di Scienze storiche, (Roma, 1903), vol. XII Sez. VIII.

som MENAICHMOS bemærker; thi det som tjener til at opnaa (τὸ κατασκευάζον) er Element af det, som opnaas (τοῦ κατασκευαζομένου), saaledes som EUKLID's første Sætning er det af den anden [Problemer] og den fjerde af den femte [Theoremer]. Paa denne Maade kan man ogsaa kalde flere Sætninger Elementer af hverandre (οὕτω δὲ καὶ ἀλλήλων εἶναι πολλὰ στοιχεῖα ῥηθήσεται); thi de opnaas ved hverandre. Saaledes slutter man Antallet af rette Vinkler, som en Polygons indvendige Vinkler udgør, deraf, at Summen af de ydre Vinkler er lig 4 Rette, og omvendt. Et saadant Element ligner et Lemma. Men paa anden Maade siger man Element om det, som er det simplere, hvori det sammensatte deler sig (εἰς ὃ ἁπλούστερον ὑπάρχον διαιρεῖται τὸ σύνθετον). Paa denne Maade kan man ikke mere sige, at alt er Element af alt, men kun, at det mere fundamentale er Element af det, der kan karakteriseres som Resultat, saaledes som Postulaterne er Elementer af Theoremerne. I denne Betydning af Elementer er ogsaa EUKLID's Elementer udarbejdede saavel for Plangeometrien som for Stereometrien, og saaledes har mange ogsaa skrevet Elementer i Arithmetik og i Astronomi.

Citaterne efter EUKLID viser, at der ikke her foreligger et ganske ordret Uddrag af MENAICHMOS, til hvem det heller ikke er rimeligt at henføre Sammenligningen med et Lemma. Dette Kunstord er vistnok yngre, og det er PROKLOS, der bruger det til Forklaring af de ham mere fremmede Elementer af første Art. Det er den anden Brug af Ordet „Elementer", som PROKLOS bedst kender, og til hvilken ogsaa vi har sigtet, naar vi har talt om, at Sætninger hos EUKLID til Elementer har de simplere forudgaaende Sætninger og tilsidst de opstillede Forudsætninger, og vi ser heraf Grunden til, at selve EUKLID's Bog og lignende Værker kaldes „Elementer": de bliver nemlig Elementer af de Sætninger, som man sammensætter deraf i videregaaende Undersøgelser. Efter selve denne anden Betydning af Elementer maa de findes ved en Analyse og bruges ved en Synthese, Operationer, som vi senere faar andre Beviser for, at MENAICHMOS kender. Naar han dog ikke bruger disse Ord, maa det bero paa, at de lige saa lidt var slaaet fast paa hans Tid som paa hans Lærer PLATON's; havde han brugt disse senere saa kendte Ord, vilde hverken PROKLOS eller hans nærmeste Kilde[1]) have undladt at referere dem. At de ikke bruges her[2]), er derimod et Bevis paa, at Operationerne er ældre end Ordene, og Henvisningen til MENAICHMOS paa, at det er med Rette, at den methodiske Brug af selve Operationerne henføres til PLATON's Skole.

Denne anden Art af Elementer, som er simplere og mere oprindelige end de Sætninger, som de skal tjene til at bevise, er vistnok den, paa hvilken Benævnelsen Elementer særlig anvendtes, men fra denne Indskrænkning ser MENAICHMOS

[1]) Efter TANNERY's Formodning GEMINOS; se La Géométrie grecque p. 136. Alle de Brudstykker efter MENAICHMOS, som her benyttes, findes i denne Bog.

[2]) Naar den mere indviklede Sætning i Citatet efter MENAICHMOS kaldes σύνθετον, er det i samme Betydning, som vi vilde sige „sammensat" uden særlig at tænke paa de Dele, hvoraf den er sammensat. Ordet optræder saaledes endnu ikke her som Kunstord, men viser blot, at Brugen af Synthese som Kunstord er meget nærliggende, ligesom det er det for os at betegne de to Operationer som Opløsning og Sammensætning.

bort i den første Forklaring, som derved faar en almindeligere Karakter, men ogsaa passer paa Elementer af anden Art. Den er den selvsamme som den nysnævnte hos ARISTOTELES. En Sætning A siges da at være Element af en anden B, naar den overhovedet benyttes i Beviset for den, selv om Sætningerne A og B i sig selv er lige simple. I saa Fald kan man ogsaa først bevise B og dernæst udlede A af denne, hvad MENAICHMOS netop fremhæver ved sit Eksempel: Bestemmelsen af en Polygons Sum af udvendige og Sum af indvendige Vinkler, som ikke er taget fra EUKLID og altsaa vistnok er brugt af MENAICHMOS selv. Saadanne Tilfælde, hvor det kunde være tvivlsomt, hvilken af to Sætninger man skulde sætte først, og hvilken man skulde sætte sidst i et System, der tilfredsstillede PLATON's Fordringer, maatte MENAICHMOS, som vi skal se blandt de første, der stræbte at efterkomme disse Fordringer, let støde paa. Vi ser her, at han ogsaa i saadanne Tilfælde kaldte den af disse Sætninger, som han valgte at bevise først, Element af den anden. Derved undgik man de Tvivl, som Muligheden af at tage forskellige Udgangspunkter ellers let vilde fremkalde.

Overensstemmende med MENAICHMOS' anden og i det mindste i Tidens Løb sædvanlige Forklaring af Benævnelsen Elementer er ikke blot Navnet Elementer paa EUKLID's Bog, men ogsaa APOLLONIOS' Betegnelse af de 4 Bøger af hans Keglesnit som Keglesnitslærens Elementer. Her fremsættes de „Elementer“, ɔ: de Sætninger og Beviser for samme, hvoraf man bagefter kan sammensætte nye, mere indviklede Sætninger og Beviserne for disse. De nævnte Værker afviger derved fra den Forestilling, som man nu ofte forbinder med Betegnelsen: elementær Lærebog, nemlig at man ikke vil stille strenge videnskabelige Fordringer til en saadan, medens der netop maatte stilles strenge videnskabelige Fordringer til de Bøger, der skulde anvendes som „Elementer“ i den antike Betydning. Paalideligheden og Almindeligheden af det, som man videre skulde finde ved Sammensætning af disse Elementer, eller af de videregaaende Undersøgelser, som man vilde bygge paa denne Grundvold, maatte afhænge af dennes egen Soliditet og Almindelighed. Havde man saaledes først, som det er Tilfældet med EUKLID's Elementer, sørget for at bevise Sætningerne saaledes, at de i lige Grad var anvendelige paa rationale og irrationale Størrelser, vilde ganske af sig selv det samme være Tilfældet med det, som man dernæst fandt ved Benyttelse af disse Elementer.

Hvad der karakteriserer et saadant Værk, som fortjener Navnet „Elementer“ i denne Betydning, træder godt frem, naar man sammenligner de to videstgaaende Bøger i APOLLONIOS' Keglesnit[1]): den III. og den V. Den første regner han med til Keglesnittenes „Elementer“, den sidste ikke. Det er ganske misforstaaet, naar man har villet sætte dette i Forbindelse med den Omstændighed, at APOLLONIOS i den sidstnævnte Bog naar til Resultater, der falder sammen med den moderne Bestemmelse af Keglesnittenes Evoluter, som nu foretages ved infinitesimale Hjælpemidler og derved kan henregnes til det, som vi nu kalder højere Mathematik. At denne Bog ikke henregnes til Elementerne, betyder, at dens Hovedformaal er den fuld-

[1]) Smlgn. min Redegørelse for disse Bøger i „Keglesnitslæren i Oldtiden“.

stændige Behandling af en bestemt Opgave: Nedfældelsen af en Normal fra et Punkt paa en Keglesnitslinie. En saadan Behandling maa indbefatte baade Opgavens Løsning og dens Diorisme eller Afgrænsningen af de Tilfælde, hvor flere eller færre Løsninger er mulige. Denne Afgrænsning, som nøje knytter sig til Opgavens Løsning og ikke umiddelbart har noget med Infinitesimalundersøgelser at gøre, kommer til at indbefatte Evolutens Bestemmelse. Hele Undersøgelsen støtter sig paa de almindelige Egenskaber ved Keglesnittene, som er fremsatte i disses i I—IV. Bog indeholdte „Elementer"; dette er jo netop Elementernes Bestemmelse, men deri ligger ogsaa, at man ikke i V. Bog er ført ind i en ny og højere Sfære. Denne sidste Omstændighed skal naturligvis ikke formindske vor Paaskønnelse af, at APOLLONIOS i denne Bog saa smukt og sikkert naar det Maal, han har sat sig; men saalænge han stiler mod det bestemte Maal og er tilfreds med at naa det for dets egen Skyld, bliver Udbyttet ikke „Elementer". Noget andet er det, at man ved videre Forarbejdelse kan faa dannet „Elementer" for endnu videregaaende Undersøgelser. Ogsaa dette antyder APOLLONIOS i Fortalen ved at omtale Betydningen af Løsning af de nævnte Opgaver og overhovedet af Berøringsopgaver for Bestemmelsen af Maxima og Minima.

I III. Bog har han derimod fuldstændiggjort de Elementer, hvoraf en vigtig Klasse af videregaaende Undersøgelser lader sig sammensætte. Af denne Bog fremdrages vel ofte det smukke og let læste — altsaa ogsaa i moderne Betydning „elementære" — Afsnit om Brændpunkterne; men APOLLONIOS selv peger i sin Fortale især hen paa den større forudgaaende, ingenlunde let læste og derfor mindre paaagtede Del af Bogen, naar han skal nævne de Klasser af videregaaende Undersøgelser, ved hvilke der bliver Brug for denne Bogs Indhold, og hvis „Elementer" den altsaa indeholder. I denne Del af Bogen fuldstændiggøres det vistnok tidligere af EUKLID opstillede Bevis for Potenssætningen eller „Newtons Sætning", som man har kaldt den. Fuldstændiggørelsen er sikkert den, som først blev mulig, da APOLLONIOS fandt paa at betragte to sammenhørende Hyperbelgrene som en og samme Kurve. Denne Fuldstændiggørelse var netop nødvendig for Sætningen som „elementær" i den antike Forstand, nemlig som en saadan, der skal spille en Hovedrolle ved Sammensætningen af nye Sætninger; uden det vil ogsaa disse blive ufuldstændige, hvad APOLLONIOS netop i sin Fortale bebrejder EUKLID. Af Fortalen erfarer man, at denne Bogs Sætninger, blandt hvilke de forskellige Skikkelser af den nævnte Sætning spiller Hovedrollen, er nyttige for „Synthesis" og Diorismer af „rumlige Opgaver" (altsaa af saadanne, som vi nu løser ved Ligninger af 3. Grad), endvidere for en fuldstændigere „Synthesis" af Stedet til 3 eller 4 Linier[1]), end EUKLID har

[1]) I det citerede Skrift henstiller PAUL TANNERY til mig, at gøre Rede for denne sidste Anvendelse af Ordet „Synthese". I den Anledning skal jeg bemærke, at det endnu ikke kan kaldes en „Synthese" af disse geometriske Steder, naar det bevises, at et Keglesnit omskrevet om en Firkant, eller som berører to Sider i en Trekant i deres Skæringspunkter med den tredie, kan betragtes som „Sted til disse Figurers 4 eller 3 Sider". Den sidste Sætning er bevist i APOLLONIOS' III. Bog, 53—56; den første lader sig, naar to modstaaende af de 4 Linier er parallele, paa lignende Maade knytte til „Potenssætningen", hvis forskellige Tilfælde bevises i APOLLONIOS' III. Bog, 16—23. I Hovedsagen maa den omspurgte Syn-

givet. Der gives altsaa netop Anvisning paa Brug af dens Sætninger til deraf at „*sammensætte*“ videregaaende Sætninger og Løsninger af Opgaver af en bestemt

---

these, hvilken APOLLONIOS ikke har medtaget i sine Keglesnitselementer, men — overensstemmende med „Elementer“s Hensigt — muliggjort ved disse, bygges paa disse Sætninger; det er ogsaa af dem, at NEWTON udleder sin Bestemmelse af de to Steder.

En Synthese vil, naar de 3 eller 4 Linier samt Forholdet a er opgivne, være en fuldstændig Bestemmelse af den Kurve, hvis Punkters Afstande x, y, z, u fra Linierne tilfredsstiller en af Betingelserne

$$x^2 = a \cdot y u \text{ eller } x z = a \cdot y u.$$

Denne Synthese vil, ligesom MENAICHMOS' Bestemmelse af andre geometriske Steder, som vi i næste Kapitel skal omtale, fremtræde som en Konstruktion (f. Eks. af Akserne i det ved en af disse Ligninger bestemte Keglesnit), efterfulgt af et Bevis for, at den konstruerede Kurve virkelig har den forlangte Egenskab. En saadan Synthese vil, ligeledes som hos MENAICHMOS, svare til en foregaaende Analyse, ved hvilken det søgte geometriske Sted antages at foreligge, hvorefter man af den opgivne Egenskab udleder saadanne, som kan benyttes til den forlangte Konstruktion. Mangler ved Analysen vil da medføre tilsvarende i det Grundlag, hvorpaa Synthesen skal bygges. Det er en saadan Mangel, APOLLONIOS tillægger EUKLID, idet han endog tilføjer, at „det ikke var muligt at tilendebringe Synthesen uden det af mig fundne“ (οὐ γὰρ ἦν δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν).

Nu er der et Fremskridt, som man ogsaa har andre gode Grunde til at tillægge APOLLONIOS, og som netop vil have ydet, hvad APOLLONIOS her siger. Ved en Analyse vil, naar man holder sig til et Sted til 4 Linier, af hvilke $x = 0$ og $z = 0$ er parallele, og benytter den nys nævnte Potenssætning, Stedet vise sig at være et Keglesnit omskrevet om det af de fire Linier dannede Parallelltrapez. Dette kan dog, naar Kurven er en Hyperbel, kun gælde, naar man betragter dennes to Grene under et som en Kurve. Det har APOLLONIOS virkelig gjort fra først af, og han har fremhævet det ved i Fortalen at betegne Indholdet af I. Bog som en almindeliggjort Behandling af de tre Keglesnit og „modstaaende (τῶν ἀντικειμένων) Keglesnit“. EUKLID, der ogsaa kendte Potenssætningen, hvad man kan slutte af ARCHIMEDES' Anvendelse af denne (Heibergs 2. Udg. I, S. 270 fl.), har sikkert ogsaa brugt den til Bestemmelse af Stedet til fire Linier. Analysen vilde da føre til samme Resultat, naar Kurven viste sig at være en Ellipse eller Parallel; men naar den Del af det søgte geometriske Sted, som skulde bestemmes i Synthesen, var en enkelt Hyperbelgren, vilde den muligvis kun gaa gennem to eller ingen af Trapezets Vinkelspidser. I Stedet for de 4 Bestemmelser, som denne Del af Analysen hos APOLLONIOS stiller til Raadighed for den synthetiske Konstruktion af Keglesnittet (og som skal suppleres ved en Anvendelse af Konstanten a), faar EUKLID, naar, som det tør antages, ikke allerede han har suppleret den ene Hyperbelgren med den modstaaende, kun 4, 2 eller 0 Bestemmelser (eller ialt 5, 3, 1), hvorved, som APOLLONIOS siger, Synthesen bliver „umulig“. Allerede Analysen vil iøvrigt hæmmes ved den Begrænsning i Potenssætningen, som følger med Anvendelsen paa en enkelt Hyperbelgren.

Iøvrigt henvises til VII. og VIII. Afsnit af „Keglesnitslæren i Oldtiden“. Den omtalte Anvendelse af Potenssætningen til at reducere Opgaven til Bestemmelsen af et Keglesnit, som er omskrevet om et Trapez og yderligere bestemmes ved Værdien af Konstanten a, lægges ved APOLLONIOS' III. Bog saa nær, at det næppe kan betvivles, at han, som efter ham NEWTON, er gaaet denne Vej. For virkelig at gennemføre Synthesen maa han imidlertid endnu bestemme Keglesnittet ved disse Betingelser, og man maa forstaa hans Ord, som om hans III. Bog ogsaa giver Midler hertil. Den, der virkelig vil skaffe Klarhed over, hvad APOLLONIOS formaaede, kan derfor ikke unddrage sig for at prøve om, og om muligt paavise, at saadanne Midler virkelig foreligger. De Veje, ad hvilke dette kan ske, er imidlertid saa forskellige, at man ikke kan sikre sig netop at angive den, som APOLLONIOS selv er gaaet; men allerede ved at vise, at der overhovedet i hans III. Bog findes Sætninger, der kan tjene til Grundlag for en saadan Vej, styrker man Tilliden til hans Oplysninger om, hvad hans III. Bog kunde bruges til ogsaa paa hans Tid.

Her har vi vel kun talt om Stedet til fire Linier i det Tilfælde, hvor Linierne $x = 0$, $z = 0$ er parallele; men Stedet til tre Linier er et specielt Tilfælde heraf, og Bestemmelsen af det almindelige Sted til fire Linier, som overhovedet af geometriske Steder, der bliver Keglesnit, lader sig føre tilbage hertil (Keglesnitslæren i Oldtiden, VIII. og X. Afsnit).

Art, medens Euklid's Keglesnitselementer kun paa en ufuldstændig Maade ydede det samme. Hvor egnet netop Potenssætningen er til at staa i „Elementer" i den Betydning, hvori de gamle tog denne Benævnelse, viser sig, naar baade Archimedes (der dog kun kendte den i dens ældre, ufuldstændige Skikkelse) gør Brug af den ved Bestemmelsen af Snit i sine Omdrejningsflader af 2. Orden, og Apollonios kan pege hen paa dens Anvendelse til Bestemmelse af geometriske Steder, og Newton gennemføre en saadan, som stemmer med Apollonios' Anvisning.

Vor Henvisning til Apollonios' Keglesnitselementer vil have tydeliggjort Betydningen af, at Euklid's Hovedværk har Navnet „Elementer". Af disse Elementer kan man sammensætte nye Sætninger og løse nye Opgaver. Hvilke af de i dette Værk foreliggende Elementer man skal anvende særlig til at løse en stillet Opgave, maa man finde ved derpaa at anvende den problematiske Analyse i den Form, hvori Pappos har meddelt den. Til Hjælp ved Eftersporingen af de Elementer, som man kan faa Brug for, tjener Euklid's „Data", et Værk, hvis Indhold ikke gaar væsentlig ud over det, som findes i hans Elementer, men hvori Sætningerne har faaet en til denne Efterspooring bekvem Form, idet der udtales, at naar noget vist er givet (δοθέν), vil noget andet derved ogsaa være det. Kunstordet δοθέν har derved den i Slutningen af Citatet fra Pappos S. 25 (223) beskrevne Betydning. I „*Mathematisches zu Aristoteles*" S. 27 viser Heiberg, at dette med Analysen saa nøje sammenhængende Begreb gaar tilbage til Tiden lige efter Platon. Det kunde naturligvis ogsaa finde Anvendelse under den Analyse, som man anvendte paa den ældre mathematiske Viden for at skabe et Værk som Euklid's Elementer, saavel som senere, da man besad baade dette Værk og Euklid's Data, for at anvende disse til nye Undersøgelser.

Endnu skal bemærkes, at den Forklaring, som her er givet af Navnet „Elementer", i hvert Tilfælde ikke kan anvendes, naar man f. Eks. beretter, at Hippokrates fra Chios har skrevet Elementer, da disse ikke kan være udarbejdede efter de samme platoniske Principer som Euklid's; men Benævnelsen kan være ført tilbage paa en Samling af de vigtigste geometriske Sætninger, der har været ordnet paa en Maade, hvorom vi intet ved.

Den her skildrede Brug af Ordene Analyse og Synthese turde i sig selv være naturlig nok til at gøre P. Tannery's Henvisning til Brugen af de samme Ord i den græske Regnekunst overflødig, og det saa meget mere, som de i denne ikke betegner Operationer, der er hinanden modsatte, saaledes som de af Pappos og her skildrede. Fuldstændigere er Overensstemmelsen med den af Tannery berørte Brug af Analyse og Synthese i den græske Grammatik, som ogsaa omtales af Proklos (S. 72,6). Ved Analysen opløses Sproget i Sætninger, Ord og Bogstaver, og disse „Elementer" sammensættes igen synthetisk til det skrevne Sprog. Sammenligningen passer saa meget bedre, da det heller ikke her var Elementerne, der fra først af forelaa, men et Talesprog, som man maatte begynde med at opløse i Sætninger, Ord og Lyde, der fremstilles ved enkelte Bogstaver, og da Analysen og Synthesen ogsaa her har faaet en ny Anvendelse, naar Skriftsproget og dets Elementer foreligger, og det gælder om at anvende det rigtigt.

Noget tilsvarende gælder, som vi saa, for Mathematikens Vedkommende, hvor Analyse og en paafølgende Synthese dels har været anvendt til fra den alt kendte Geometri at naa tilbage til dens simpleste Forudsætninger og af disse sammensætte et rationelt System, dels, da et saadant var blevet til, skulde vejlede til dets rette Brug i videregaaende Undersøgelser. I begge Tilfælde maatte man sikre sig hver enkelt Operations logiske Rækkevidde. Denne Sikkerhed skaffede man sig ved den alt omtalte Leddeling baade af Analysen og Synthesen, hvormed forbandt sig en tilsvarende Udvikling af selve det mathematiske Sprog, saa Brugen af et Ord helst aldrig maatte være vilkaarlig, Betydningen aldrig tvivlsom. Var end Dannelsen af et saadant Sprog begyndt langt tidligere, var det dog i Forbindelse med Brugen af den analytiske Methode, at det naaede til den stereotype Fuldkommenhed, som vi møder i Euklid's sproglige Fremstilling, og som dernæst holdtes vedlige i den græske Mathematik.

Det er altsaa under Anvendelse af den analytiske Methode, at den Omformning af Geometrien fandt Sted, som tilsidst førte til Euklid's Elementer. Platon har vistnok peget hen paa denne Methode; men en Methode selv bliver i Virkeligheden først til under Brugen og antager først bestemte Former, naar man gennem de enkeltes individuelle Arbejder paa de enkelte Opgaver, gennem de Vanskeligheder, som disse frembyder, og de Midler, som klartskuende Mennesker finder heldige at anvende over for disse, kommer paa det rene med, hvilke Former der er de bedste og fuldkomneste. Gennem det Arbejde, som vi skal omtale i det følgende Kapitel, naaede man paa samme Tid til Fuldendelsen af Euklid's Elementer og af de Former og den Leddeling, hvori den analytiske Methodes to Afdelinger, Analyse og Synthese, senere optræder hos Grækerne. Dette ses af, at Euklid i Fremstillingen af sine Sætninger overalt bruger den for Synthesen foreskrevne Leddeling. Han bruger den saa nøjagtig, at man overalt vilde kunne opstille den tilsvarende Analyse, der ved den formelle Brug af den analytiske Methode skal gaa forud for den tilsvarende synthetiske Fremstilling. I det hele og store er sikkert ogsaa, som vi her har gjort gældende, en Analyse gaaet forud for den synthetiske Fremstilling af Elementerne. En saadan kan ogsaa være gaaet forud for Fremstillingen af mange enkelte Sætninger. Saaledes kan Euklid's berømte Bevis for den pythagoræiske Sætning godt være dannet ved en forudgaaende Analyse af denne da velkendte Sætning og være en til denne Analyse svarende Synthese. Men under det Arbejde, hvoraf Euklid's Elementer er fremgaaet i Tiden fra Platon til Euklid, har man dog sikkert ofte paa en friere Maade forbundet Analyse og Synthese, dog stadig med det Formaal sluttelig at faa en saadan fuldt sammenhængende rent synthetisk Lærebygning som den, vi har i Euklid's Elementer.

Kap. V.

De mathematiske Iværksættere af den platoniske Reform.

Hele denne Udvikling maatte skyldes Mathematikere af Fag. De egentlig mathematiske Fremskridt, som tillægges PLATON selv, er enten ikke tilstrækkelig sikrede eller ikke betydelige nok til at karakterisere ham som saadan, og mærkværdigvis vedkommer de aldeles ikke et saadant systematiserende Arbejde som det, han priser i „Staten“[1]). Hans Ytringer i „Staten“ og andetsteds røber imidlertid en Opfattelse af Mathematiken og dens Sætninger, som har været klar nok til at udfinde visse almindelige Krav, der maatte stilles for at omdanne den til en rent rationel Videnskab. Denne Klarhed er sikkert vunden og skærpet ved Forhandlinger med de Mathematikere, som han efterhaanden fik til at beskæftige sig med denne Omformning, og som han flere Gange viser hen til („de, der beskæftiger sig med Geometri“ o. s. v.). At han ogsaa i herhen hørende Spørgsmaal har besiddet en vis Myndighed overfor disse Mænd, ser vi af den Tillidsfuldhed, hvormed han paa flere Steder uddeler sin Ros og Daddel; af hans Tone kan man se, at denne i Reglen har været respekteret, selv om han beklager, at man ikke endnu har villet behandle Stereometrien saaledes, som han krævede det.

Dog maa man ikke overvurdere den umiddelbare Andel, som PLATON kan have haft i Iværksættelsen af de mathematiske Fremskridt, som han bidrog til at fremkalde. En saadan vilde han have haft, hvis han sagde: den og den Sætning eller Gruppe af Sætninger er slet begrundet, man maa gaa længere tilbage for at faa en fuldstændigere Begrundelse, eller den og den Fremstillingsform er ufuldstændig; den giver ikke Sikkerhed mod enhver Mulighed for Undtagelser. Den Mathematiker, der i Henhold til saadanne nøjere præciserede Anker foretog Udstykningen af Sætninger i „Elementer“ eller uddannede betryggende Former for den problematiske eller theoretiske Analyse, vilde da gøre bestilt mathematisk Arbejde, maaske udmærket Arbejde, men et saadant, for hvilket den, der først fik Øje for dets Nødvendighed, vilde have en meget væsentlig Andel i Æren. Saaledes har PLATON efter „Staten“ imidlertid ikke formet sine Opfordringer. Bortset fra Stereometrien, hvor hans Klager just ikke giver Anvisning paa Midler til at afhjælpe dem, priser han Mathematiken som den, der allerede er en rationel Videnskab, og hvoraf han ser, at et saadant Ideal lader sig realisere. Denne Pris maatte imidlertid for Mathematikerne indeholde en Opfordring til at prøve, om det skildrede Ideal var naaet paa en Maade, som ogsaa de fuldtud kunde godkende, og til at stræbe at udfylde de Mangler, som de maatte opdage. Det er sikkert ikke PLATON, der har gjort EUDOXOS opmærksom paa Utilstrækkeligheden af tidligere infinitesimale Græense-

[1]) Tværtimod tillægger man ham Opfindelsen af et Apparat til mekanisk Konstruktion af to Mellemproportionaler og en numerisk Løsning af Ligningen $x^2 + y^2 = z^2$, som turde have været kendt langt tidligere.

overgange, og han kan næppe have anet Nødvendigheden af ved en Konstruktion at tilvejebringe ligesidede Trekanter og Kvadrater, førend man gjorde Brug af disse Figurer. De Indvendinger, som SPEUSIPPOS, saaledes som vi straks skal se, gjorde mod denne af MENAICHMOS indførte Brug af „Problemer", nemlig at Figurerne som evige ikke behøver at tilvejebringes, er jo netop en Genklang af, hvad PLATON selv siger om de mathematiske Sandheder. PLATON har saaledes næppe selv vist Mathematikerne de Veje, ad hvilke de skulde naa det af ham opstillede Ideal; men ved at holde dem dette for Øje har han faaet dem til at sætte deres egen mathematiske Skarpsindighed ind paa at naa det paa en langt fuldstændigere Maade, end det hidtil havde været Tilfældet.

Paa en Indflydelse af den her skildrede Art passer det, som udsiges om PLATON og hans nærmeste Efterfølgere i EUDEMOS' ved PROKLOS (S. 65—68 i Friedleins Udgave) bevarede Mathematikerfortegnelse. Naar PLATON selv her berømmes for den „betydelige Udvikling" (*μεγίστη ἐπίδοσις*), som han gav Mathematiken i Almindelighed og Geometrien i Særdeleshed, motiveres dette ikke ved nye Opdagelser eller deslige, men „ved den Iver, som han udfoldede for disse Videnskaber, og hvorom hans [ogsaa af os kendte] Skrifter vidner, idet de alle er fulde af mathematiske Betragtninger og overalt hos dem, der giver sig af med Filosofien, vækker Interesse for disse Videnskaber". Det er aabenbart, at hans Filosofi da ogsaa omvendt maatte tiltrække Folk med mathematisk Anlæg og ægge dem til saadant mathematisk Arbejde, som var fornødent for at gennemføre hans Krav til Mathematiken som rationel Videnskab.

Naar PROKLOS andetsteds (S. $211,_{21}$) siger om en af PLATON's samtidige, LEODAMAS, at PLATON „meddelte" ham den analytiske Methode, ved Hjælp af hvilken han derpaa gjorde sig bekendt som Ophavsmand til talrige geometriske Opdagelser — om hvilke vi iøvrigt intet ved —, vilde det lyde underligt, at nye positive Fremskridt i Mathematiken skulde skyldes Meddelelsen af en Methode af saa almindelig og derved ubestemt Karakter som den analytiske. LEODAMAS kan derimod nok af PLATON have faaet Anvisning paa den af denne ønskede formelle Omdannelse og med Held have fulgt denne Anvisning.

Paa at EUDOXOS, der næsten er PLATON's samtidige, i Mathematikerfortegnelsen betegnes som Discipel af PLATON's Venner, bør der næppe lægges for stor Vægt (med mindre der derved skulde tænkes paa, at han har haft samme Lærere som PLATON). Han synes nemlig at have stiftet sin Skole i Kyzikos, før han i Athen sluttede sig til PLATON og dennes Disciple, og sin fremragende Plads som Astronom og Mathematiker har han sikkert indtaget ret uafhængig af PLATON. Der meddeles endvidere, at han har behandlet visse Spørgsmaal, rejste af PLATON, og dertil anvendt Analyse; men dermed siges næppe andet, end at han har behandlet Spørgsmaalene efter sin Ankomst til Athen, og at disse da ogsaa har interesseret PLATON. De gjaldt for det første Opstillingen af 3 nye „Proportioner", nemlig

$$\frac{a-x}{x-b}=\frac{b}{a}, \quad \frac{a-x}{x-b}=\frac{b}{x}, \quad \frac{a-x}{x-b}=\frac{x}{b},$$

og Opgaverne maa nærmest have gaaet ud paa Bestemmelsen af „Mellemproportionalen“ x af disse Ligninger. Løsningen af disse Opgaver, af hvilke de to sidste reduceres til „Fladeanlæg“ (Løsning af Ligninger af anden Grad), kan ikke have voldt EUDOXOS nogen Vanskelighed; men de geometriske Omformninger, hvorved den er foretaget, kan have frembudt Interesse, og er ganske naturlig fundne ved „Analyse“ i dette Ords mere omfattende Betydning. Hvad der menes med de dernæst omtalte „Spørgsmaal med Hensyn til Snittet“, er ikke ganske klart. Foruden andre af TANNERY (*Géométrie grecque* p. 76) berørte Muligheder kunde jeg tænke mig, at der blot sigtes til den Snitbestemmelse, hvortil Løsningen af de tre alt nævnte Ligninger i sin geometriske Form fører; men herpaa ligger i denne Sammenhæng ingen Vægt. Naar der derimod siges, at EUDOXOS forøgede Antallet af de saakaldte almindelige Theoremer (*τῶν καθόλου καλουμένων θεωρημάτων*), kan derved tænkes paa den Almindeliggørelse af den tidligere kun for kommensurable Størrelser gældende Proportionslære, som opnaas ved EUDOXOS’ berømte i EUKLID V. Def. 4 fremsatte Postulat, der tillige ligger til Grund for alle infinitesimale Grænseovergange. Denne Definition er netop det *στοιχεῖον*, som maatte fremgaa ved en Analyse af det, som man virkelig foretager sig ved en saadan Grænseovergang som dem, DEMOKRIT tidligere maa have foretaget sig for at finde Pyramidens og Keglens Rumfang, eller som dem, man foretager sig ved at udvide Sætninger om Forhold mellem kommensurable Størrelser til inkommensurable. Analysen af denne sidste Udvidelse har tillige givet andre *στοιχεῖα*, nemlig EUKLID V. Definitioner 5. og 7. paa Forholds Ligestorhed og Uligestorhed. Disse Analyser er altsaa nogle af de betydningsfuldeste Eksempler paa, hvorledes man kommer til det af PLATON fordrede rationelle Grundlag for Geometrien; men deraf følger ingenlunde straks, at EUDOXOS først skulde have foretaget dem, da han kom under Paavirkning af PLATON. Lige saa rimeligt er det, at EUDOXOS’ Analyse paa dette vigtige Punkt, ligesom THEAITET’s tidligere omtalte Behandling af Kriterierne paa Rodstørrelsers Kommensurabilitet, har bidraget til at fremkalde PLATON’s almindelige Krav.

En mere direkte Indflydelse har PLATON vistnok udøvet paa de Disciple, som dernæst omtales i Mathematikerfortegnelsen, nemlig AMYKLAS, MENAICHMOS, der tillige var EUDOXOS’ Discipel, MENAICHMOS’ Broder DEINOSTRATOS, THEUDIOS og ATHENAIOS. Naar der siges, at disse Forskere samledes i Akademiet og gjorde deres Undersøgelser i Fællesskab, skal dette maaske ikke tages ganske bogstavelig; men det udtrykker dog sikkert mere end det ret selvfølgelige, hvorpaa Indledningen til Dialogen „Rivalerne“ giver et Eksempel, at to eller flere slog sig sammen om Studiet af en Forfatter eller om en fælles Undersøgelse. Hvor saa mange Mathematikere samledes som i Akademiet, maatte af sig selv de Spørgsmaal, der beskæftigede dem, komme til mundtlig Forhandling, og da ikke mindst det af PLATON selv saa stærkt fremdragne om Opførelsen af en strengt rationel mathematisk Lærebygning, og om de Veje, de selv som Mathematikere maatte gaa for at realisere deres filosofiske Lærers Ønsker. Aftaler var nødvendige for at enes om en fælles Terminologi, om fælles Udgangspunkter o. s. v., uden hvilket den ene ikke vilde kunne dømme om Værdien af, hvad den anden havde opnaaet, og disse Aftaler kunde først træffes efter Forhandlinger om, hvilke Veje der er at foretrække. Om saadanne Forhandlinger vidner da ogsaa de Efterretninger, som vi her kan fremdrage om det Arbejde, der er udført af de nævnte Mænd og deres Efterfølgere indtil Euklid. Noget saadant som de faste Former, hvori Grækerne iklædte Brugen af den analytiske Methode, og hvis Henførelse til den Tid bekræftes ved, hvad der siges om Deinostratos og Menaichmos, og ligeledes de sproglige Regler for mathematisk Fremstilling, som Euklid og senere Forfattere saa nøjagtig følger, bærer Præg af at være fremgaaet af Forhandlinger og en fælles Prøvelse af de enkelte Formers logiske Værdi og Betydning. Iøvrigt peger selve den Dialogform, som Platon har givet sine Arbejder, hen paa den store Betydning, som paa hans Tid Samtaler havde for Videnskabens Udvikling.

At Geometriens formelle Behandling har været et Hovedemne for Forhandlingerne mellem Platons mathematiske og filosofiske Lærlinge, ses af Beretninger hos Proklos, som vi straks skal omtale. Hvilke Bidrag der iøvrigt skyldes hver enkelt af Platons ovennævnte Disciple, ved vi for fleres Vedkommende ikke. Deinostratos gaar lige i Eudoxos' Fodspor i sit strenge Bevis for en rimeligvis allerede af Hippias benyttet, men ikke nøjagtig begrundet Grænseovergang (se Oversigt 1913, S. 461). Bevisets Nøjagtighed hænger saa nøje sammen med den Form, hvori det fremsættes, at det tør antages, at den opbevarede Form (Pappos ed. Hultsch p. 256) i det væsentlige er den samme, som Deinostratos har givet det. Da foreligger allerede her den typiske Form for den til den analytiske Methode knyttede Anvendelse af en Reductio ad absurdum til Bevis for, at en Grænseværdi hverken kan være større eller mindre end den Størrelse, som det i Sætningen udtales at den har; det er den samme Skikkelse, som senere Euklid og Archimedes giver Beviserne for infinitesimale Grænseovergange.

Det er dog fremfor alle Menaichmos, hvem bevarede Brudstykker udpeger som virksom for at fremme og fra mathematisk Side uddybe Platons Tanker om en fuldtud rationel Behandling af Geometrien og udvikle de dertil tjenende Former. Vi har allerede S. 27—28 (225—226) set ham omtale de mathematiske Sætningers Opløsning i og Sammensætning af „Elementer". Om hans Deltagelse i Forberedelsen af tilfredsstillende „Elementer" vidner ogsaa følgende Meddelelse, som er bevaret hos Proklos (S. 77,15—78,13).

Ἤδη δὲ τῶν παλαιῶν οἱ μὲν πάντα θεωρήματα καλεῖν ἠξίωσαν, ὡς οἱ περὶ Σπεύσιππον καὶ Ἀμφίνομον, ἡγούμενοι ταῖς θεωρητικαῖς ἐπιστήμαις οἰκειοτέραν εἶναι τὴν τῶν θεωρημάτων προσηγορίαν ἢ τὴν τῶν προβλημάτων, ἄλλως τε καὶ περὶ ἀϊδίων ποιουμέναις τοὺς λόγους. οὐ γὰρ ἔστι γένεσις ἐν τοῖς ἀϊδίοις, ὥστε οὐδὲ τὸ πρόβλημα χώραν ἐπὶ τούτων ἂν ἔχοι, γένεσιν ἐπαγγελλόμενον καὶ ποίησιν τοῦ μήπω πρότερον

Allerede blandt de gamle foreslog nogle, som Speusippos og Amphinomos, at kalde alt Theoremer, idet de mente, at Benævnelsen Theoremer passer bedre end Benævnelsen Problemer paa theoretisk Viden, især paa en saadan, der gælder evige Ting; thi det evige har ingen Tilblivelse, saaledes at der for dettes Vedkommende heller ikke er Plads for ὄντος, οἷον ἰσοπλεύρου τριγώνου σύστασιν ἢ τετραγώνου δοθείσης εὐθείας ἀναγραφὴν ἢ θέσιν εὐθείας πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ. ἄμεινον οὖν φασι λέγειν, ὅτι πάντα ταῦτα ἔστι, τὰς δὲ γενέσεις αὐτῶν οὐ ποιητικῶς ἀλλὰ γνωστικῶς ὁρῶμεν ὡσανεὶ γιγνόμενα λαμβάνοντες τὰ ἀεὶ ὄντα. ὥστε καὶ πάντα θεωρηματικῶς ἐροῦμεν ἀλλ'οὐ προβληματικῶς λαμβάνεσθαι. οἱ δὲ ἀνάπαλιν πάντα προβλήματα λέγειν ἐδικαίουν, ὡς οἱ περὶ Μέναιχμον μαθηματικοί, τὴν δὲ προβολὴν εἶναι διττήν, ὁτὲ μὲν πορίσασθαι τὸ ζητούμενον, ὅτὲ δὲ περιωρισμένον λαβόντας ἰδεῖν, ἢ τί ἐστιν, ἢ ποῖόν τι, ἢ τί πέπονθεν, ἢ τίνας ἔχει πρὸς ἄλλο σχέσεις.

Problemet, som udsiger Tilblivelsen og Frembringelsen af noget, som endnu ikke er til, f. Eks. Dannelsen af en ligesidet Trekant (Euklid I, 1), Tegningen af et Kvadrat paa en given Side (I, 46) eller Anbringelsen af en ret Linie (Liniestykke) saaledes, at den faar et givet Endepunkt (I, 2). Det er altsaa (siger de) bedre at sige, at alle disse Ting er til, og at vi ser deres Tilblivelse ikke frembringende, men erkendende, idet vi betragter de altid værende Ting som blivende til. Derfor maa vi sige, at alt tages i theoretisk, ikke i problematisk Form.

Men andre, som Menaichmos og de Mathematikere, der sluttede sig til ham, vilde omvendt kalde alt Problemer; men disse havde et dobbelt Formaal, nemlig enten at tilvejebringe det søgte eller efterat have taget noget bestemt at undersøge, hvad det er, eller hvordan det er, eller hvilke Egenskaber det har, eller i hvilke Forhold det staar til andet.

Man vil bemærke, at begge Parter, der forhandler om den Form, Geometriens Elementer bør antage, er enige om, at der ikke er nogen væsentlig Forskel paa den Rolle, Problemer og Theoremer deri skal spille; kun vil det ene Parti bruge Fællesbetegnelsen Theoremer, det andet Fællesbetegnelsen Problemer. Hvad man saaledes allerede synes at være bleven enig om, er den ejendommelige Rolle, som Problemer og de dertil svarende Konstruktioner skulde komme til at spille i den græske Geometri [1]). Om man tidligere har brugt Ordet Problemer i Geometrien, ved jeg ikke; men man har, som vi snart skal se, i hvert Fald løst Konstruktionsopgaver, der gik ud paa Tegning af Figurer. Derved var da Tale om den mekaniske Tilvejebringelse af disse ved de i hvert Tilfælde hensigtsmæssigste Midler og ikke udelukkende ved Lineal og Passer, som det efter Euklid blev fordret, naar det overhovedet er muligt. Ja selv disse mekaniske Redskaber nævnes ikke i Euklids Elementer; men de i Problemerne indeholdte Konstruktioner giver blot

---

[1]) Se min Afhandling: Om Konstruktionen som Eksistensbevis i den gamle græske Mathematik. Nyt Tidsskrift for Mathematik A, 3 (1892); paa Tysk i Mathematische Annalen 47 (1896).

Beviser for, at den ved den i Ord beskrevne Konstruktion tilvejebragte Figur maa eksistere, saavidt som man anerkender, at de rette Linier, Cirkler og Punkter, hvis Eksistens kræves anerkendt i Postulaterne, virkelig eksisterer. De udtrykker altsaa en af al mekanisk Udførelse uafhængig Aarsagssammenhæng mellem Postulaternes Eksistenskrav og de konstruerede Figurers Eksistens. De i PROKLOS' Meddelelse anførte Eksempler er særlig typiske for denne euklidiske og senere græske Brug af Problemer. En ligesidet Trekant eller et Kvadrat skal tilvejebringes ved en i et Problem angivet og bevist Konstruktion, før man gør nogen Brug af disse Figurer. Særlig giver I,2 Anvisning paa en Omvej, der er ganske betydningsløs, naar man tænker paa mekanisk Brug af Passeren, og den kan kun sigte til Anvendelse af Postulater, der har en rent geometrisk Karakter, og som man vil opstille i et saa ringe Antal som muligt.

Disse Eksempler er vistnok de samme, som i sin Tid benyttedes i selve den omtalte Strid, og ikke saadanne, som senere er tagne af EUKLID's Elementer for at belyse denne. Naar PROKLOS og andre senere Forfattere gør dette, f. Eks. paa det S. 28 (226) anførte Sted, hvor MENAICHMOS ogsaa omtales, anføres Sætningerne gerne med Nummer. At to af de Sætninger, der tages til Eksempel, netop er de to første hos EUKLID, maa da bero paa, at det forhandlede Spørgsmaal var fremkommet ved, at det nu netop blev gjort gjældende, at Geometriens Elementer maatte begynde med disse Sætninger som de første Anvendelser af Postulaterne til at sikre sig Eksistensen af de i disse to Sætninger bestemte Figurer som Udgangspunkter for den paa Postulaterne samt de „almindelige Begreber" synthetisk opførte Lærebygning. Den væsentlige Andel, som MENAICHMOS har haft i Valget af dette Udgangspunkt for geometriske Elementer, turde fremgaa af den her foreliggende Forhandling om de dertil knyttede Benævnelser paa Sætningerne og om den Betydning, man derved tillagde dem, og den bekræftes ved, at vi S. 28 (226) saa MENAICHMOS nævne Postulaterne som Geometriens første Elementer.

Man vil maaske her indvende, at det er under Omtalen af SPEUSIPPOS' og AMPHINOMOS' Mening, at de tre Eksempler nævnes. Dels kan man imidlertid ikke fra dem vente et særlig i mathematisk Henseende betydningsfuldt Skridt, dels fremkommer Eksemplerne ikke som Forslag til en Ordning fra deres Side, men snarere som Indvending mod en Ordning eller i det mindste imod at markere den ved at give de anførte første Begyndelsessætninger og dem, hvormed man i Overensstemmelse dermed ogsaa maa begynde senere Afsnit, det særlige Navn Problemer. Med nogen Ret kan der siges, at de netop efter den Brug, man gør af dem, bliver en Slags Theoremer, nemlig Eksistenstheoremer. Ved den anførte Begrundelse heraf redder PLATON's filosofiske Efterfølger, SPEUSIPPOS, som alt berørt i Begyndelsen af dette Kapitel, sin Tilslutning til PLATON, efter hvem de mathematiske Sandheder som evige Sandheder ikke kan tilvejebringes. MENAICHMOS kommer paa en anden Maade til sin Sammenstilling af begge Dele som „Problemer", idet han synes at fastholde, at baade de ideelle Figurer selv og deres Egenskaber kun er til i vor Erkendelse, og at de saaledes først bliver til ved Eksistensbeviser, eller ved det, som han kalder Problemer. Maaske er det i Erindring om denne Strid, at Euklid, ikke som mange af hans Efterfølgere ved Overskrifter betegner om de enkelte Sætninger er „Theoremer“ eller „Problemer“ i den Betydning, hvori disse Ord altid senere er blevet tagne. Den Forskel, der er imellem dem, og som ogsaa Menaichmos anerkender ved Omtalen af to Slags Problemer, træder dog altid frem i Sætningernes Form og Behandling, saaledes ved at ende deres Beviser henholdsvis med Ordene „det, som skulde gøres“ eller „det, som skulde bevises“.

Endog det store positive geometriske Fremskridt, som tillægges Menaichmos, kan have haft at gøre med Geometriens formelle Konsolidering. Jeg tænker paa Opdagelsen af plangeometriske Hovedegenskaber, der karakteriserer Keglesnitslinierne, eller snarere Anvendelsen af Keglesnit til at konstruere to Mellemproportionaler; thi begge Dele er vel næppe fundne samtidig. Plane Snit i Cylinderen synes navnlig at have været undersøgt tidligere, og det er ikke umuligt, hvad Tannery antager, at det „Snit“, hvormed Eudoxos, som vi nys saa, skal have beskæftiget sig, kan have været et plant Snit i en Kegleflade. Hvad der særlig tillægges Menaichmos, er Anvendelsen af Parablerne $x^2 = ay$ og $y^2 = bx$ og Hyperblen $xy = ab$ til at finde de to Mellemproportionaler x og y mellem a og b, saaledes at $a : x = x : y = y : b$. Menaichmos’ Opdagelse er da gaaet ud paa, at de nævnte Kurver, hvis Anvendelighed til at løse de nævnte Opgaver er iøjnefaldende, og som maa have frembudt sig, da man saa, at der til dette Brug krævedes andre Linier end ret Linie og Cirkel, kan fremstilles som plane Snit i Keglflader. Denne Konstruktion giver netop for disse Kurvers Vedkommende det Eksistensbevis, paa hvilket vi nys saa, at Menaichmos lagde saa stor Vægt. Eksistensen af Kegler og af plane Snit i Kegler følger nemlig af de Eksistenskrav, som den elementære Geometri stiller for Cirklens og den rette Linies Vedkommende.

Ogsaa den Form, hvorunder Bestemmelsen meddeles af Eutokios, fortjener Opmærksomhed[1]). Overskriften Ὡς Μέναιχμος synes at betegne, at her virkelig foreligger en Gengivelse af den overleverede Form for Menaichmos’ egen Fremstilling, Under denne Overlevering med et eller flere Mellemled er der ganske vist foregaaet Forandringer, i det mindste den ret selvfølgelige, at Keglesnittenes nyere Benævnelser, Parabel og Hyperbel er indførte; men Delingen i en Analysis og en Synthesis, som fremsættes i de for disse typiske Former, gaar rimeligvis tilbage til Menaichmos. At selve Ordet Analyse ikke forekommer[2]), stemmer med, at han ogsaa efter Citatet S. 28 (226) endnu ikke synes at have gjort Brug af dette Kunstord. Naar derimod Synthesen indledes med συντεθήσεται δὴ οὕτως, kan dette enten være kommen ind senere eller være en begyndende Brug af Ordet Synthese. I Analysen træffer vi Ordet δοθέν „givet“ i den samme S. 32 (230) omtalte Betydning, hvorom det da be-

[1]) Heiberg’s 2. Udgave af Archimedes III, S. 78 ff.

[2]) Det kan iøvrigt staa hen, om man, selv da en fuldstændigere Terminologi havde udviklet sig for den analytiske Methode, som Overskrift over den her først meddelte Analyse vilde bruge Ordet ἀνάλυσις eller det noget mere begrænsende Ord ἀπαγωγή. I en videre Forstand tager den med Menaichmos samtidige Aristoteles Begrebet Analyse, naar han kalder sin Logik Ἀναλυτικά.

mærkedes, at den gaar tilbage til ARISTOTELES' Tid. Det kan altsaa ogsaa være brugt af MENAICHMOS. Formerne for den fuldstændige saakaldte problematiske Analyse gaar saaledes tilbage til PLATON's nærmeste Elever, og det er ikke urimeligt at antage, at MENAICHMOS, der, som vi saa, fremhævede Betydningen af „Problemer", kan have bidraget væsentlig til at udvikle disse Former. Hans opbevarede Fremstilling vil da senere have staaet som en Norm for Brugen af dem, ligesom DEINOSTRATOS' for Fremstillingen af de ligeledes til den analytiske Methode knyttede Beviser for Grænseovergange (S. 37 (235)).

Om MENAICHMOS' Bidrag til Udvikling af den analytiske Methode vidner ogsaa den Fastsættelse af Betingelserne for Paalideligheden af Omvending af Sætninger, som efter PROKLOS (S. 254,4) skyldes MENAICHMOS og AMPHINOMOS.

Disse forskellige Meddelelser om Fremskridt, der skyldes MENAICHMOS, vedrører vel forskellige Spørgsmaal, men der er en saadan Sammenhæng imellem dem, at de godt har kunnet rummes i et enkelt Skrift, som da har givet en skarpsindig og opfindsom Mathematikers Svar paa de Tilskyndelser fra PLATON's Side, som særlig kommer til Orde i „Staten". Han gaar saa grundig tilværks, at han ikke naar selv at udarbejde „Elementer"; men han giver sikker Anvisning paa de mathematiske Principer og Betragtninger, som maa lægges til Grund for Arbejdet paa saadanne, og paa de Sætninger, hvormed der maa begyndes. Og han viser tillige, hvorledes de samme Principer kan lægges til Grund for et videregaaende Arbejde (Keglesnit), og udvikler de paalidelige og frugtbare Arbejdsformer og nøje bestemte Fremstillingsformer, hvoraf Grækerne skulde gøre saa udstrakt Brug. Et Skrift af ham med dette Indhold findes dog ikke omtalt, med mindre man tør tillægge ham en af flere Forfattere omtalt Kommentar til PLATON's Stat, hvis Forfatter er en MENAICHMOS fra Alopekonnesos; men denne antages i Almindelighed at være forskellig fra Mathematikeren[1]). Dog har H. MARTIN i sin Udgave af Theon fra Smyrna ment, at et Citat af Mathematikeren MENAICHMOS, som findes der, maa referere sig til PLATON's Omtale i X. Bog af koncentriske Planetsfærer og da skrive sig fra den omtalte Kommentar til Staten. Denne skulde saaledes skyldes Mathematikeren. Det forekommer mig, at denne Formodning, der saaledes skriver sig fra et helt andet Citat, i høj Grad bestyrkes ved, at MENAICHMOS' her refererede Ydelser saa nøje svarer til PLATON's Omtale af Mathematiken i VI. og VII. Bog af „Staten". Kommentaren har dog saa ikke været en Forklaring af det filosofiske Indhold af dette Værk, men kun belyst de deri indeholdte mathematiske Bemærkninger og vist, hvorledes dets Udtalelser om Mathematiken mathematisk lader sig gennemføre.

Medens MENAICHMOS forbereder en ny og grundigere Omdannelse af Geometriens „Elementer", forsøger en anden af PLATON's Disciple, THEUDIOS, straks at udarbejde saadanne, i hvilke han vistnok maa have stræbt at iværksætte en Del af

[1]) Saaledes MAX C. P. SCHMIDT i „Die Fragmente des Mathematikers Menächmus". Philologus (1884) Bd. 32. P. TANNERY antager dem derimod for identiske.

de Forbedringer, som stemte med PLATON's ideelle Krav. Han har derved f. Ex. kunnet tage noget Hensyn til Fremskridt, som skyldes EUDOXOS, men den fornødne samlede Omarbejdelse af Elementerne har han kun kunnet foretage i det Maal, som var muligt uden saa grundige Forarbejder som dem, MENAICHMOS samtidig paabegyndte. De „Elementer“, som THEUDIOS' afløste, var skrevne af LEON, der vel var yngre end PLATON, men ikke siges direkte at være paavirket af denne. Ogsaa han havde dog optaget principielle Spørgsmaal, nemlig Undersøgelsen af Mulighedsbetingelsen for stillede Opgaver, den saakaldte Diorisme, der senere fik en særlig Plads i de bestemte Former for Analyse og Synthese og afgav et Hovedmiddel til Bestemmelse af Maxima og Minima. Om THEUDIOS hedder det, at han gjorde forskellige Sætninger mere almindelige, hvad der passer godt med den ham tilskrevne Paavirkning fra PLATON. Iøvrigt har HEIBERG i „Mathematisches zu Aristoteles“ paavist, og ved sin Samling af mathematiske Steder hos ARISTOTELES givet, et godt Middel til at komme til Kundskab om THEUDIOS' Elementer endog om den Form, under hvilken mange enkelte Sætninger er fremsatte. De mathematiske Sætninger, hvoraf ARISTOTELES gør Anvendelse som Eksempel paa eller til Sammenligning med sine Betragtninger, maa nemlig have været at finde i de da brugelige „Elementer“, til hvilke ogsaa hans Disciple kunde henvises. Sammenligning med EUKLID giver da god Lejlighed til at bemærke, hvilke Fremskridt i Stof og særlig i Behandlingsmaade der efter THEUDIOS maa være vundne ved mellemliggende Mathematikeres og EUKLID's eget Arbejde. Dette Middel skal vi flere Steder benytte.

Efter de her omtalte Akademikere nævner Mathematikerfortegnelsen endnu HERMOTIMOS og PHILIPPOS. Naar det særlig siges om den første, at han fandt Sætninger af Elementerne, tyder det paa en Fortsættelse af MENAICHMOS' Arbejde paa at give Elementerne den rette Skikkelse; han har da været et Mellemled mellem MENAICHMOS og EUKLID. Hans Behandling af geometriske Steder, som ogsaa nævnes, kan være gaaet ud paa ogsaa at bringe Bestemmelsen af andre geometriske Steder ind under de samme analytiske Former, som MENAICHMOS allerede havde anvendt paa Parablen og Hyperblen (S. 40 (238)).

Ved Siden af Mathematikernes Arbejde og indbyrdes Samarbejde har deres Samarbejde med de samtidige Dyrkere af Filosofien været af Betydning. Et Exempel herpaa har vi allerede haft i SPEUSIPPOS; men en alt overvejende Indflydelse paa Arbejdet paa Opførelsen af en rationel mathematisk Lærebygning vil dog ARISTOTELES, der grundlagde og opførte Læren om selve Tankens almindelige Love, have haft, medens han paa sin Side ogsaa kunde hente baade Materiale og Exempler fra det, som Mathematikerne paa deres Omraade havde naaet og vedblev at gennemføre. Hans Opgave var paa et videre Omraade den samme som de Mathematikeres, der gennem en Analyse af den alt bestaaende Mathematik udfandt den rationelle Sammenhæng og lagde denne til Grund for en ny rationel Opførelse af den hele Lære. Tænke sikkert og klart havde man længe kunnet, og ikke mindst Mathematikerne af PLATON's Slægtled havde vist, hvor stor en Finhed der kunde opnaas paa deres Omraade, hvor man kunde holde alle de Sidehensyn borte, som ellers gør logiske Slutninger indviklede og usikre. Deres Tankearbejde udgjorde saaledes en særlig frugtbar Mark for den Analyse, hvorved ARISTOTELES maatte hente de Elementer, hvoraf han paa sin Side skulde opføre sin omfattende Tænkelære. I denne fik Mathematikerne paa deres Side Lejlighed til at se de Tankelove, som de selv fulgte paa deres mere begrænsede Omraade, i en større Sammenhæng, hvad der ogsaa kunde lære dem at give dem fuldkomnere Udtryk. ARISTOTELES har saaledes baade benyttet den foreliggende Mathematik, hvad der her kommer os til Nytte ved hans talrige Citater af de da existerende Elementer (Theudios'), og vistnok samarbejdet med de samtidige Mathematikere og har derigennem og ved sine „*Analytica*", da de udkom, øvet en betydelig Indflydelse paa Mathematikerne, vel ikke mindst under deres Dannelse af de faste Former for Mathematikens Behandling, som vi har omtalt i forrige Kapitel. I Kap. XI skal vi se et Eksempel paa, at de af ARISTOTELES hævdede Principer ogsaa fik Indflydelse paa selve Indholdet af de mathematiske Elementer.

MENAICHMOS og ARISTOTELES var omtrent samtidige; hvis det er rigtigt, at ogsaa MENAICHMOS har været Lærer for ALEXANDER DEN STORE, har dette været et særligt Bindeled mellem dem. Vi har ogsaa set dem udtale sig paa overensstemmende Maade om Brugen af Ordet *στοιχεῖα*. Vort sidste Citat af MENAICHMOS vedrørte Betingelserne for Omvending af mathematiske Sætninger; det samme Spørgsmaal behandler ARISTOTELES i II. Bog 24 af *Analytica priora* for almindelige Dommes Vedkommende.

Derimod har det været underkastet nogen Tvivl, om ARISTOTELES kender noget til den Brug af Problemer og de til Grund for disse liggende Postulater, hvis Indførelse vi særlig har tillagt MENAICHMOS. T. L. HEATH kommer[1]) i sit omhyggelige Studium af ARISTOTELES' *Analytica posteriora* I. Kap. 10 (76 a 31—77 a 4) til det Resultat, at denne deri netop gør Rede for den Brug af Postulater, som findes hos EUKLID og senere hos ARCHIMEDES; HEIBERG hævder derimod (Mathematisches zu Aristoteles S. 5), at det i hvert Tilfælde ikke er paa disse, han i dette Kapitels anden Del anvender Ordet *αἴτημα* (Postulat). For mit Vedkommende slutter jeg mig i det mindste til HEATH's Opfattelse af Kapitlets første Del, hvor dette Ord endnu ikke forekommer, men hvor der peges hen paa den Brug, som der virkelig er for Postulater i den euklidiske Betydning. ARISTOTELES begynder med at tale om de Grundbegreber, hvorom man ikke kan bevise, at de er. Hvad de er, maa man baade om dette oprindelige (*τὰ πρῶτα*) og om det deraf dannede (*τὰ ἐκ τούτων*) fastslaa [nemlig ved Definitioner, der som flere Gange bemærket endnu ikke indeholder nogen Paastand om det defineredes Existens], saaledes i Geometrien baade hvad en ret Linie og en Trekant er. At det er, forudsættes for det oprindeliges

[1]) *Euclids Elements translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary.* Cambridge 1908, vol I, S. 117 ff. I dette Værk gives omfattende og kritiske Oplysninger om den Litteratur, hvorved EUKLID's Elementer belyses.

Vedkommende [altsaa om rette Linier] og bevises for det øvriges [f. Ex. Trekanter]. — Det er jo netop det første, der gøres i EUKLID's Postulater, dog saaledes, at der ikke helt i Almindelighed siges, at f. Ex. rette Linier existerer, men saadanne, som er bestemt ved to Punkter (Post. 1) eller ved et helt Liniestykke (Post. 2) o. s. v. Ved Beviserne for Existensen af de sammensatte Figurer, begyndende med ligesidede Trekanter, benytter EUKLID ikke blot de for Videnskaberne fælles Forudsætninger (τὰ κοινά), af hvilke EUKLID som „Almindelige Begreber“ (κοιναὶ ἔννοιαι) har anført dem, der ogsaa finder Anvendelse paa Geometrien; men foruden de efterhaanden beviste Sætninger bruges ogsaa de Egenskaber ved Grundbegreberne, som gaar med ind i Paastanden om deres Existens, saaledes for den rette Linies Vedkommende dens Bestemmelse ved to Punkter. Det maa være disse Egenskaber, som ARISTOTELES nævner som det tredie (καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τὶ σημαίνει ἕκαστον), der foruden det, som Definitioner og Axiomer (τὰ κοινά) indeholder, behøves i et Bevis og kræves forudsat. Dette passer ganske paa EUKLID's Postulater; men for det til EUKLID's Benævnelse svarende Verbum αἰτεῖν (kræve) bruger ARISTOTELES her endnu Ordet λαμβάνειν (tage), der ogsaa kan finde Anvendelse paa andre opstillede Forudsætninger, saaledes i Kapitlets Begyndelse paa Definitioner. ARCHIMEDES kalder ogsaa de af ham indførte Forudsætninger λαμβανόμενα. Ordet Postulat (αἴτημα) bør da vist kun som hos EUKLID anvendes paa Existensantagelser, Existenskrav.

Dette Ord forekommer som sagt først i den anden Del af Kapitlet hos ARISTOTELES, hvor det sammenstilles med ὑπόθεσις, Forudsætning. Noget af det, som han her siger om de ved disse Ord betegnede Begreber, kan passe godt paa de euklidiske Postulater. Naar han saaledes siger, at der ikke er nogen Nødvendighed for at antage dem, vilde dermed udtrykkes det samme, som jeg S. 8 (206) har betegnet ved at kalde dem den væsentlige Del af Definitionerne, idet de f. Ex. for den rette Linies Vedkommende ikke følger af den opstillede Definition 4. Denne, der blot knytter sig til det ydre (πρὸς τὸν ἔξω λόγον), er geometrisk intetsigende (smlgn. VIII. Kap. i nærv. Skrift) og kan ikke bruges i Beviset. Dette maa knyttes til det indre, som opfattes med Sjælen (πρὸς τὸν ἔσω eller πρὸς τὸν ἐν τῇ ψυχῇ). Netop dette Krav opfyldes af EUKLID's Postulater, som i Modsætning til den omtalte Definition anfører geometrisk frugtbare Egenskaber. Endog det, der særlig siges om Postulater, at Læreren postulerer det, hvorom Lærlingen enten ingen Mening har eller endog en modsat, kunde forsvares med, at de ikke passer paa de tegnede Figurer.

Derimod vil det være vanskeligere at forlige den Antagelse, at de her omtalte Postulater skal være de euklidiske, med ARISTOTELES' Forklaring, at man deri uden Bevis antager det, som dog virkelig er bevist (ὅσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας), en Egenskab, som han kommer tilbage til. HEATH mener at komme ud herover ved at oversætte δεικτά ved „matter of proof“, hvad han i sine egne Forklaringer omskriver til „a proper subject of demonstration“. Derved kan sigtes til, at Postulaterne skulde udtale Sætninger af samme Natur som dem, man sædvanlig beviser. For ikke at tale om 4. Postulat, som man sædvanlig undres over ikke at finde mellem beviste Sætninger, synes en saadan Opfattelse at bekræftes ved de talrige Forsøg paa at bevise det 5te. Disse skriver sig dog mest fra den Tid, da det opstilledes som 11te Axiom, og man endnu ikke saa, at det var uundværligt som Antagelse af en Existens, nemlig af et Skæringspunkt. Jeg kunde bedre tænke mig, at der ved Anvendelsen af *δεικτά* her ikke tænkes paa et mathematisk Bevis, som jo netop ikke kan føres, men paa en Eftervisning af den paastaaede Mulighed af Post. 1, 2, og 5 ved Hjælp af Lineal, af 3 ved Hjælp af Passer og af 4 ved Hjælp af Gnomon (se i det følgende Kap. VII og VIII); *μὴ δείξας* udtrykker da, at Paastanden gøres gældende uafhængig af denne Eftervisning, der dog kun kan være ufuldstændig.

Der er dog en anden Forklaring af Ordet *ὑπόθεσις*, paa hvilken de her udtalte Ord synes at passe bedre, nemlig den, som vi er vante til, naar vi i Udsigelse af en geometrisk Sætning skelner mellem Udsigelserne af de Forudsætninger, som gøres om den forelagte Figur, og af de Egenskaber, den da skal bevises at have; disse kalder vi Hypothesis og Thesis. Her bevises Hypothesis ikke; men skal man anvende Sætningen paa en forelagt Figur, maa Hypothesis forud være bevist om denne. Ogsaa hvad der ellers siges i Kapitlets anden Del passer paa en saadan Hypothesis, det tilsidst anførte Exempel: at en Linie paa Figuren siges at være en Fod, uden dog at behøve at være det paa den tegnede Figur, endog særlig godt. Denne Forklaring af Ordet Hypothese, for hvilket man under nærmere betegnede Omstændigheder skulde kunne sætte Postulat (*αἴτημα*), synes at være den, hvortil Heiberg sigter; men som sagt betegner den da noget andet end det, der har været Tale om i Kapitlets første Del. Hypotheser i denne Betydning vilde overhovedet ikke vedrøre Grundbegreber eller Grundsætninger (*αἱ ἀρχαί*), der betegnes som Kapitlets Indhold.

Heller ikke ved jeg (hvis Kundskaber paa dette Omraade dog ikke gaar langt), om Aristoteles særlig anvender Ordet Hypothese paa denne Art Forudsætninger. Proklos gør det vel (S. 252,7), naar han i Anledning af Euklid I,6 taler om Sætningers Omvending, som sker ved, at Hypothesis — i den her nævnte Betydning — ombyttes med Thesis; Thesis kalder han derimod her i Overensstemmelse med sædvanlig græsk Sprogbrug, Konklusion (*συμπέρασμα*). Dette sidste gør ogsaa Aristoteles, naar han i Anal. priora II,24 taler om Omvending af Sætninger; men Ordet *ὑπόθεσις* forekommer ikke her. Derimod har Heath henvist til, at det i Anal. posteriora I,2 netop (72 a 14—22) bruges til at betegne de i første Del af 10. Kap. omtalte Existenspaastande, hvorved han, og jeg med ham, mener, at der vises hen til saadanne Forudsætninger som dem, hvilke Euklid kalder Postulater (*οἷον λέγω, τὸ εἶναί τι ἢ μὴ εἶναί τι*).

Af alt dette ser man, at Aristoteles er fortrolig med den Tankegang, som førte til Dannelsen af de euklidiske Postulater; men selv om man fuldt ud holder sig til Heath's Fortolkninger, har den vistnok endnu været temmelig ny og Genstand for Forhandlinger vel nærmest mellem Aristoteles og den Geometer, der havde særlig Brug for den ved saadanne „Problemer“ som dem, hvormed han vilde begynde Geometrien, nemlig MENAICHMOS. Af Citatet S. 28 (226) saa vi, at han kaldte de geometriske Grundelementer, hvortil han kommer ved sin Analyse, Postulater (αἰτήματα), og at disse i det mindste var af samme Aar som EUKLID's, ser vi af den Maade, hvorpaa han (S. 39 (237)) begyndte at opføre Geometrien. Det turde da være i Tilslutning til ham, at ogsaa ARISTOTELES i visse Tilfælde vil bruge dette Ord, medens han har begyndt med at kalde den Slags Forudsætninger Hypotheser. MENAICHMOS havde Brug for mere formulerede Postulater, end den blotte Paastand om Existensen af en ret Linie o. s. v., særlig i de Sætninger, hvormed han vil begynde, for EUKLID's Post. 1 og 3 og maaske for Kvadratets Vedkommende for 4. Postulat (se Kap. VIII). Naar derimod ARISTOTELES ikke, saaledes som han gør for „Alm. Begr.“, giver noget Exempel paa et udformet Postulat, forklares det ved, at saadanne ikke endnu har foreligget i THEUDIOS' Elementer, men netop først opstilledes paa hans Tid af MENAICHMOS. Dette Resultat stemmer med det, hvortil HEIBERG var kommen, idet han slet ikke mente at finde noget om de euklidiske Postulater hos ARISTOTELES[1]).

Vi skal i VIII. Kap. se, at et Hovedformaal, som knyttede sig til den her omtalte Brug af postulatbestemte Problemer, var at ombytte de anskuelige mekaniske Flytninger af Figurer med Konstruktioner. Vi vil da ogsaa faa at se, hvilke Vanskeligheder Mathematikerne fra MENAICHMOS til EUKLID havde at overvinde for at naa dette Maal, som først Nutiden, særlig gennem HILBERT, har naaet paa en Maade, der tilfredsstiller den. Først maa vi dog se, hvor stor en Rolle saadanne Figurflytninger spillede i den førplatoniske Geometri, og hvor nær det psykologisk har ligget at bruge dette Hjælpemiddel.

Kap. VI.

Om oprindelige intuitive Billeder; Synsoplevelser.

Hvad der indenfor den elementære Geometris Omraade, det vil sige indenfor det Omraade, som behandles i EUKLID's Elementer, særlig beskæftigede Mathematikerne fra PLATON til EUKLID, var Anvendelsen af den analytiske Methode til at

[1]) Ved Gennemsynet af ARISTOTELES' Analytica ser jeg, af Anal. Post. I,7, at Mathematikerne paa hans Tid allerede maa have beskæftiget sig med Spørgsmaalet om Løsningen af Ligningen $x^3 + y^3 = z^3$ i hele Tal. Det nævnes som Exempel paa et arithmetisk (taltheoretisk) Spørgsmaal, der ikke kan løses geometrisk (ɔ: ved den almindelige Størrelseslære); forud er det omtalt, at der ikke kan føres arithmetiske Beviser for almindelige geometriske Sætninger. Det her nævnte Spørgsmaal, som ikke vedkommer de i vor Text omtalte Sager, omtaler jeg her som et Vidnesbyrd om, at den platoniske Skoles mathematiske Undersøgelser ogsaa strakte sig til dette Spørgsmaal, som man ellers først træffer behandlet i den arabiske Mathematik.

give Geometrien, der tillige omfattede den daværende Form for en almindelig Algebra, en saadan Skikkelse som den, PLATON krævede. Den første Betingelse for et saadant Arbejde var, at der allerede existerede en Mathematik, hvis Sætninger man kunde udstykke i „Elementer“, ja i sine første Elementer, Definitioner og Axiomer, for af disse igen at sammensætte baade de Sætninger, man gik ud fra, og nye Sætninger. At denne Betingelse virkelig var til Stede i et Omfang, der i sine ydre Omrids ikke udvidedes synderlig ved EUKLID's Elementer, ser vi tildels af HIPPOKRATES' Behandling af Halvmaanerne, der viser, at han besad og forstod at anvende hele det ikke ubetydelige Udsnit af geometrisk Viden, som han derved kunde faa Brug for; DEMOKRIT kendte Pyramidens og Keglens Rumfang, og de fem regulære Polyedre var kendte paa PLATON's Tid. Den anden Forudsætning er, at denne ældre Viden ikke allerede selv var erhvervet ad væsentlig de samme Veje, som EUKLID følger i sine Elementer, og som vi efter ham har vænnet os til at betragte som de eneste, der fører til en paalidelig Viden. Man kunde i Virkeligheden fristes til at tro, at HIPPOKRATES' Viden er vundet ad lignende Veje, naar man ser ham benytte den paa hans Tid foreliggende Viden til ligesaa korrekte Slutninger som dem, EUKLID eller en nulevende Mathematiker vilde gøre. Mange har derved ladet sig friste til ogsaa for de Sætningers Vedkommende, som han anfører og benytter, men for hvilke vi ikke kender hans Begrundelse, at forudsætte Begrundelser stemmende med de euklidiske Principer. Saaledes har endog HANKEL, hvis Omtale af indisk Mathematik dog viser hans Erkendelse af, at der ogsaa gives andre Veje til mathematisk Viden end den helt igennem forstandsmæssige Behandling, i den Grad forset sig paa dennes Optræden hos Grækerne, at han overser, at den heller ikke hos dem kunde være Udgangspunktet, men kun en Behandlingsform, som først kunde udvikle sig, efterhaanden som den fik Materiale at tumle med. Naar saaledes HIPPOKRATES ved, at Cirkler forholder sig som Kvadraterne paa deres Diametre, kan HANKEL kun forestille sig, at denne Viden er erhvervet paa en Maade, som i nogen Maade stemmer med EUKLID's Bevis for denne samme Sætning. I saa Fald maatte HIPPOKRATES have foregrebet Betragtningsmaader, som EUDOXOS vist med Rette faar Æren for at have indført. Paa Grund af Manglen af de samme Betragtningsmaader, der maa kræves anvendte i et exakt Bevis for Sætningerne om Pyramidens og Keglens Rumfang, betænker ARCHIMEDES i „Ephodos“ sig paa at betragte DEMOKRIT som disses Opdager. Og som virkeligt Bevis for de paa PLATON's Tid kendte fem regulære Polyedres Existens betragtede Grækerne efter EUKLID kun den af ham givne Konstruktion, som knytter sig til den forudgaaende Inddeling af de Størrelser, der — som vi nu siger — er irrationale ved Kvadratrod. Den formelle Opstilling af Definitioner og Axiomer, som danner et uundværligt Grundlag for en systematisk Behandling, gaar, efter hvad vi ved, heller ikke paa noget væsentligt Punkt længere tilbage end til PLATON's Tid. Der var altsaa virkelig paa hans Tid noget at gøre for at opføre en systematisk Lærebygning, der omfattede den geometriske Viden, som man alt besad.

Hvorledes var da denne ældre Viden erhvervet? Og hvorfra skrev sig den subjektive Vished om denne Videns Gyldighed, som man ad Tankens objektive Veje kun kan erhverve ved et Bevis — der jo iøvrigt kun gør Tilliden til den beviste Sætning afhængig af Tilliden til de Forudsætninger, hvorpaa det bygger, og til de Tankelove, som Slutningerne følger? Vi har rent formelt besvaret dette Spørgsmaal ved flere Gange at bruge Ordet Intuition. Ordet selv, „Skuen", indeholder endog en Antydning af den Vished, som den indgyder, men det er kun et Ord, der intet siger om, hvorledes dette gaar til. Den intuitive Vished gælder et samlet Billede, medens Tanken erhverver samme Vished ved at sammensætte det af dets enkelte Dele. Selve Intuitionen er ogsaa en sammensat Tilegnelsesmaade, idet den erholdes ved en Samvirken af forskellige legemlige og sjælelige Evner: Syn med begge Øjne og efterhaanden fra forskellige Steder, Følelse af Modstanden hos de Legemer, hvis Form man danner sig en Forestilling om, mod at forandres eller flyttes og af de Stillinger, vore Arme og Fingre derved indtager eller gennemløber o. s. v., og sammen dermed en Erindring om saadanne tidligere Sansninger og en Evne til at samle de forskellige samtidige Sansninger og Erindringer om ældre Sansninger til et Helhedsbillede. Dette opfattes som en „Ding an sich", der har alle de Egenskaber, for hvilke det er det samlende og samlede Udtryk. Naar dette Billede kommer til at staa saa klart, at man derpaa kan aflæse de Egenskaber, som det samler, uden at man er sig de enkelte Sansninger eller den Samlingsproces bevidst, hvoraf det er fremgaaet, kalder vi det et intuitivt Billede. Dettes Dannelse begynder med Barnets uvilkaarlige Kombination af de ved de forskellige Sansninger modtagne Indtryk, og dets Indhold udvides sammen med Kredsen af de Sanseindtryk, som melder sig, eller som man af en gavnlig Nysgerrighed skaffer sig Lejlighed til at modtage. Derimod vil vi her saa meget som muligt se bort fra Dannelsen af de Billeder, hvis Oprindelse man vel ikke øjeblikkelig gør sig Rede for, men som er den samlede Frugt af foregaaende Tænkning eller modtagen Lærdom. Er det virkelig samlet til en Helhed, overfor hvilken man glemmer, hvorfra man har disse Enkeltheder, kan ogsaa det kaldes intuitivt[1]). I Modsætning dertil vil vi kalde et saadant intuitivt Billede, der ikke saaledes er vundet som Frugt af Tænkning og Skoling, oprindeligt. Det er en psykologisk Erfaring, at denne Oprindelighed netop ikke tilhører det, som en logisk Analyse bringer til at betragte som de første, udelelige „Elementer", dem, man allerførst definerer og hvis Egenskaber man gør til Axiomer, men netop visse logisk talt sammensatte Billeder og Begreber.

For ret at forstaa de ældste Overleveringer om Begyndelsen paa geometrisk Arbejde maatte man helst vide Besked om, hvilke Billeder og dertil knyttede Sandheder der frembyder sig som Genstand for en oprindelig Intuition; men omvendt giver ogsaa den historiske Overlevering Midler til at finde, paa hvilke intuitive Billeder dette Arbejde fra først af har bygget. Disse Billeder fremtræder som Forudsætninger, hvorom alle antages at være enige, og for hvilke ingen falder paa

[1]) Om en saadan ved Tænkning vunden og sikret „Helhedserkendelse" henvises til min Afhandling i Videnskabernes Selskabs Oversigt 1914, S. 274.

at give nogen Begrundelse. Den Tænkning, som allerede er fornøden for at beskrive et Billede i Ord, kan dog samtidig have faaet nogen Indflydelse ogsaa paa dets Dannelse; Udsigelsen af dets enkelte Træk er i sig selv en begyndende Tænkning. Bedst sikret er altsaa den oprindelig intuitive Karakter af Billeder, hvis Gyldighed man betragter som saa selvfølgelig, at man finder det overflødigt at beskrive deres Indhold, ja endog blot at nævne dem, og dog bygger paa dem som Kendsgerninger.

Et Exempel herpaa frembyder den tidlige Dannelse af Plangeometrien. Her er ikke fjerneste Tale om, hvad en Plan eller blot en Flade er, hvilket jo vilde kræve rumlige Forklaringer; men hvad der siges om Figurerne, om Stykker af Marken, som maales, om de Afbildninger, man gør i Sandet eller paa andre Flader, passer kun paa Figurer i Planen. Man har saaledes et intuitivt Billede af Planen. Hvorledes dette er opstaaet, er et psykologisk Spørgsmaal, som det ikke her er vor Sag at besvare. Man ser bort fra de Ujævnheder, som alle de Flader, man har set eller følt paa, frembyder; man foretager altsaa en ubevidst Abstraktion, hvad der er mindre mærkeligt, naar det erindres, hvad vi skal vende tilbage til i XIII. Kap., at Evnen til at abstrahere paa dette Standpunkt hænger nøje sammen med Manglen paa Evne til at differentiere. Hvorledes det nu end er hermed, saa opererer man i en Plan, og Operationerne foretages og beskrives, uden at der tales om den Plan, hvori alt foregaar. Dens Existens vedbliver som en Forudsætning at ligge bagved, ogsaa længe efter at man har begyndt at ræsonnere over de i Planen indeholdte Figurer. Deri ligger ogsaa Grunden til det store Forspring, som en videnskabelig Behandling af Plangeometrien fik for den endnu af PLATON savnede videnskabelige Behandling af Stereometrien. At den ideale Plan er et intuitivt Billede, træder os iøvrigt ogsaa i Møde under alle de Forsøg, som fra PLATON's Dage til nu er gjort paa at definere den direkte eller ved karakteriserende Postulater. Vi prøver disse Definitioner, ikke efter om de pædagogisk eller videnskabelig er mere eller mindre hensigtsmæssige, men efter om de stemmer med det intuitive Billede, vi nu engang besidder, og i Henhold til hvilket vi foretager Operationer i Planen.

Med Billedet af en ret Linie gaar det paa samme Maade. Ja, som med Planen er det endog indtil vore Dage vedblevet at gaa med det tredimensionale Rum. Som intuitivt Billede har dette som „Rummet“ dannet Rammen for alle geometriske Undersøgelser, indtil det selv som tredimensionalt er indrammet i det mere abstrakte Begreb: Rum med et vilkaarligt Antal Dimensioner.

For at vinde den rette Forstaaelse af ældgammel Geometri vil det dog være godt tillige at have andre Midler til at afgøre, hvilke intuitive Billeder der har staaet til Raadighed paa den Tid, end selve Beretningerne, der jo, som vi her saa, ofte kun ved deres Tavshed røber dette. Vi maa helst have en Vejledning af samme Art som ved Læsningen af de mere videnskabelige Arbejder fra en noget yngre Tid. Ved den gaar vi ud fra, at Tankens Love var de samme for disses Forfattere som nu, selv om de kan være iklædt saa forskellige Former, at det kan kræve et vist Arbejde deri at genfinde de samme Tankeforbindelser, som vi nu bruger. For ret at forstaa de ældste geometriske Iagttagelser maa vi paa lignende Maade gaa ud fra, at disses Iagttagere var udrustede med Evner af samme Art til at danne oprindelige intuitive Billeder, som findes hos nulevende Mennesker.

Vi kan prøve de intuitive Billeder, som vi selv er i Stand til at danne os, men maa da saavidt muligt se bort fra den geometriske Skoling, som vi selv besidder. Den Fare, som kommer derfra, kan tildels afhjælpes ved Forsøg med Personer, som er geometrisk uskolede. Selv disse vil ganske vist ikke kunne frigøre sig fra Indtryk, der er komne til dem fra Bygninger og deslige, hvorpaa geometriske Kundskaber har udøvet en Indflydelse, der ved Brug af visse Figurer træder synlig frem; men de intuitive Billeder, der danner sig, vil i hvert Fald i meget stemme med med den oprindelige Intuition, hvis Indflydelse har gjort sig gældende ved Dannelsen af den allerførste Geometri.

Dette gælder saaledes om de „Synsoplevelser", hvorover Dr. Rubin har gjort en Række af systematiske Iagttagelser i sin Doktorafhandling[1]). De intuitive Billeder, hvorom jeg har talt, og som jeg har Brug for at kende, er bygget paa „Sanseoplevelser", og en Sanseoplevelse er selv — som det fremgaar af de af Rubin beskrevne Synsoplevelser — det samme som det intuitive Billede, som man faar ved en bestemt begrænset Brug af Sanserne, bl. a. begrænset til et enkelt Tidsrum af en vis kort Størrelse; den opleves dog kun af den, der ved tidligere Brug af Sanserne er opøvet i Sansning. En Synsoplevelse kan være indskrænket til Syn med ét Øje, holdt paa et bestemt Sted i Rummet. Den, der ser saaledes, vil dog i Erindring om tidligere Sansninger af forskellig Art kunne have en bestemt Forestilling om Afstandens Virkning o. s. v. Billedet vil imidlertid, hvis det opfanges af en Plan, blive perspektivisk. At gamle Iagttagere slet ikke har lagt Vægt paa en saadan Begrænsning af Sansningen, fremgaar af, at det først var i Rennæssancetiden, at Perspektiv blev en Lov for Malerne. Rubin beskæftiger sig ogsaa væsentlig med Syn med begge Øjnene, hvad der sætter Beskueren i Stand til at opfatte de enkelte Punkters Afstande og derved faa en klarere Forestilling om de enkelte Punkters indbyrdes Beliggenhed, altsaa om Figurernes virkelige Former. Dette opnaas dog ikke ved noget Ræsonnement, men ved en ubevidst Evne, der maa være udviklet ved tidligere Kombination af forskellige Sansninger. Rubin gør forøvrigt ogsaa ofte andre Indskrænkninger i de Synsoplevelser, som han underkaster sine Forsøgspersoner; idet han f. Ex. lader dem se paa et Kvadrat fra et Punkt enten over en Vinkelspids eller over Midten af en Side. Saadanne Indskrænkninger maa naturligvis interessere ham, der kun ved en Deling kan naa den tilsigtede psykologiske Analyse; de kan ogsaa interessere os, naar de ældgamle Iagttagere har været underkastede lignende Indskrænkninger; men i Reglen vil disse have haft Lejlighed til, ja, interesseret sig for en mere alsidig Beskuen. Meget af det, som Rubin's Forsøgspersoner har synsoplevet under mere indskrænkede Forhold, lader sig dog ogsaa anvende paa de fuldstændigere intuitive Billeder, hvortil de har ydet Bidrag.

I den efterfølgende Beretning om nogle af Rubin's Undersøgelser over Synsop-

---

[1]) E. Rubin: Synsoplevede Figurer. Studier i psykologisk Analyse. 1915.

levelse af plane Figurer i samme Plan vil jeg kalde F l a d e f i g u r, hvad han kalder Figur, idet jeg har en mere omfattende Brug for Ordet Figur, og foruden om Fladefigurer, der optager en Del af Planen, ogsaa taler om L i n i e f i g u r e r (der kan gengives ved Stregfigurer). Naar to Fladefigurer, af hvilke den ene kan være sort, den anden hvid, støder sammen langs en fælles Grænselinie, f. Ex. naar den ene omslutter den anden, gælder, som Rubin's Forsøg viser, en Synsoplevelse kun den ene Fladefigur ad Gangen, overfor hvilken den anden da optræder som „Grund". Er den ene omsluttet af den anden, vil den første vel sædvanlig straks opfattes som Fladefigur, den anden som Grund. En Fladefigurs Form, f. Ex. et Lands paa et Landkort, kan man mere eller mindre nøje beskrive ved Angivelse af dens udadgaaende Tunger og indadgaaende Bugter. Den Viden, man ved denne Synsoplevelse faar og ved Beskrivelsen meddeler om Fladefigurens Form, rummer logisk talt en tilsvarende Viden om Grundens Form langs hele den Grænselinie, som de har fælles; Tunger paa Fladefiguren svarer til Bugter paa Grunden og omvendt. Denne nye Viden vindes dog først ved Slutninger, og r u m m e s i k k e i d e n f ø r s t e S y n s o p l e v e l s e. Ved en Tilfældighed eller ved en Anstrengelse, der kan foranlediges ved den nævnte Slutning, kan man derimod opnaa i e n n y S y n s o p l e v e l s e at se det, der først var Grund, som Fladefigur, og omvendt.

Ved et Arbejde, som bestaar i med Blikket at gennemløbe Skillelinien eller en Fladefigurs hele Omrids, kan man synsopleve denne, hvorved Fladefigurens Tunger og Bugter bliver til Bøjninger til højre og venstre. Dette Arbejde er væsentlig et sjæleligt Arbejde og behøver i det mindste ikke at være forbundet med nogen Bevidsthed om en tilsvarende Bevægelse af Øjet; en saadan kan iøvrigt ogsaa være nødvendig for at synsopleve selve Fladefiguren.

Den ved Synsoplevelse vundne Viden om Omridsets Form medfører ogsaa en Viden om den deraf indesluttede Fladefigurs. Ja, dette kan ikke alene ske ved en Slutning, men Fladefiguren tilegnes saa umiddelbart ved Fremstillingen af dens Omrids, at man gennem en Stregfigur, der i sig kun fremstiller Omridset, umiddelbart kan synsopleve Fladefiguren uden at bruge en virkelig Synsoplevelse af Omridset til Gennemgangsled. Dette har, som man ser af de ældste Afbildninger, allerede i ældgammel Tid været benyttet til Afbildning ved Stregfigurer.

Rubin meddeler S. 164 ff. nogle meget velvalgte Forsøg, som skal oplyse, om den, der ved et Omrids afbilder en Figur, der er forelagt, ikke ved sit Omrids, men som farvet Fladefigur paa en Grund af anden Farve, opnaar dette ved at synsopleve Fladefiguren selv eller dens Omrids. Forsøgene udgjorde 4 forskellige Rækker, hvis Forskelle beroede paa, at d e l s de afbildede Figurer e n t e n vedblev at være synlige under Tegningen e l l e r skulde erindres efter at have været forelagte en vis Tid, d e l s de eftertegnede Billeder under Tegningen e n t e n var synlige e l l e r usynlige for Tegneren. Forsøgspersonerne var geometrisk skolede, maaske fordi de da bedre kunde gøre Rede for deres Oplevelser. Ellers kunde jeg ønske, at de havde været saa uskolede som muligt. Ulemperne ved deres Skoling falder imidlertid bort derved, at deres forskellige Udtalelser røber, i hvilken Grad de havde forstaaet at frigøre sig fra Skolingen. Denne kan nemlig efter det følgende kun have medført en Tilbøjelighed til at fæste Opmærksomheden ved Omridset. Man tør derfor holde sig til Udtalelserne fra den Person, som øjensynlig bedst holder sig fri for Paavirkning fra Skolingen, og fra hvem de øvrige kun afviger ved nogle Opfattelser, der ret tydelig bærer Præg af denne. Bortset fra de Vanskeligheder, som Tegningen paa et Blad, som man ikke selv saa, voldte, og som man maatte overvinde ved at følge Omridsene, foregik Tegningen nærmest ved en Omkresning af Fladebilleder, som man tænkte overført paa Billedplanen. Deraf fremgaar, at Oplevelsen af Fladefiguren frembyder sig mere umiddelbart end Oplevelsen af Omridset.

Det kunde være interessant ligeledes at erfare, om Afbildninger af en Stregfigur ved en Fladefigur eller ved en ny Stregfigur vilde give samme Resultat. I sidste Tilfælde vilde der dog foreligge en stor Fristelse til umiddelbart at efterligne den foreliggende Figurs Streger.

Helt anderledes gaar det, naar man i Ord skal gøre Rede for den forelagte Figurs Egenskaber, eller naar man, som ved det Forsøg, der dannede en Undtagelse, skal gøre Brug af disse. Da vil, naar man skal gaa videre end til at nævne de før omtalte Tunger og Bugter, Omtalen af Omridset spille en større og større Rolle, jo videre man gaar, og i en geometrisk Behandling vil dette efterhaanden blive Hovedsagen. Paa den vigtigste Grund hertil peger Dr. Rubin S. 179. Vi vil dog omskrive hans Forklaring saaledes: Omridset har kun en Dimension, medens Fladefiguren har to, eller hin indeholder ∞^1 Punkter og kan gennemløbes ved en kontinuert Bevægelse af et Punkt, hvad Fladefiguren, der indeholder ∞^2, ikke kan. Paa den anden Side faar man lige saa meget at vide ved at undersøge Omridset. Ved at holde sig til dette gør man, hvad der maa gøres i enhver indgaaende logisk Behandling: ved at se bort fra det, der ligger indenfor Omridset, abstraherer man fra noget, som ingen Indflydelse kan faa paa Resultatet af den foreliggende Undersøgelse af Fladefigurens geometriske Egenskaber.

Det første Skridt i denne Retning var den alt omtalte Tegning af et Omrids, der skal gælde som Fremstilling af selve Fladefiguren og ogsaa opfattes saaledes. At man udenfor mathematiske Betragtninger fastholder den oprindelige Opfattelse som Fladefigur, stemmer med den daglige Brug af Ord som Trekant og Firkant, hvor „Kant“ betyder det samme som Rubin kalder „Tak“ paa Figuren, ɔ: en skarp „Tunge“. Det var først Mathematikerne, der fik Brug for Ord som Treside og Firside. Euklid bruger endda kun *τρίπλευρα* og *τετράπλευρα* som Adjektiver til *σχήματα* (Figurer), medens man af Definitionerne I,20 og 21 ser, at *τρίγωνον* er Sprogets sædvanlige Ord for Trekant. Naar han har maattet kalde almindelige Firkanter „firsidet Figur“, kommer det af, at Sprogbrugen, ligesom ofte i populært Dansk, havde lagt Beslag paa Ordet *τετράγωνον* (Firkant) for Kvadrat. Paa Dansk og Tysk er „Firside“ jo kun et Kunstord, som Mathematikerne fik Brug for, da de skulde tale om den fuldstændige „Firside“ med 6 „Vinkelspidser“.

Paa lignende Maade er det gaaet med Ordet *σχῆμα*, Figur. Det er, som vi ser af Euklid's Definitioner, oprindelig Udtryk for en begrænset Fladefigur, men er efterhaanden gaaet over til at betegne hele den tegnede Figur med dens Linier, som man fik Brug for i den mere indgaaende geometriske Undersøgelse, og som baade indbefattede Fladefigurernes Omrids og andre Linier, som der under Undersøgelsen blev Brug for. Den samme Overgang har, som jeg bemærkede, fundet Sted fra Rubin's Sprogbrug til min, netop fordi jeg skulde knytte mere geometriske Hensyn til de intuitive.

Skønt Rubin ikke siger noget nærmere derom, og det for den her omtalte Undersøgelse om Forhold mellem Fladefigur og Omrids har været uvæsentligt, antager jeg, at den Genfremstilling af plane Figurer paa ny Planer, som her har været tilsigtet, er Genfremstilling ved kongruente (eller dog ligedannede) Figurer og navnlig ikke perspektiviske Billeder. Der foreskrives nemlig i Reglen intet om kun at bruge ét Øje og holde det og Tegnefladen i bestemte Stillinger. Prøverne giver altsaa en Bekræftelse paa, hvad man ogsaa kan se af de ældste opbevarede Afbildninger, at plane Figurer kongruente med en forelagt hører med til de intuitive Billeder, som kan tilegnes alene ved Sanseoplevelser [1]). Det samme maa da ogsaa være Tilfældet med Kongruens af Dele af samme Figur. Særlig naar disse er symmetrisk beliggende, vil en saadan Symmetri træde tydelig frem, naar man ser paa Figuren fra et Punkt af Symmetriplanen. Paa denne Maade kan man faa en intuitiv Vished for Existensen af Rektangler, nemlig Firkanter, hvis fire „Takker“, hvormed Rubin betegner Vinklerne, som de optræder paa Fladefiguren, er ganske ens, derigennem for at de to Trekanter, hvori Rektanglet deles ved en Diagonal, er ganske ens, og derved, at

---

[1]) Da sædvanlige, tegnede eller malede Billeder vel nærmest skal gengive Synsoplevelser, kan der maaske rejses nogen Tvivl om Eneberettigelsen af Brug af Perspektiv. Som en Nødhjælp til Gengivelse af en rumlig Figur ved et Billede i en Plan kan den perspektiviske Gengivelse ikke omfatte den hele Synsoplevelse, men alene et enkelt Synsindtryk, nemlig Synet med ét Øje fra et bestemt Sted. Der gøres herved et vilkaarligt Valg indenfor de Synsindtryk, som bidrager til den hele Synsoplevelse, som foruden ved Brug af to Øjne yderligere kan være fuldstændiggjort ved Flytning af Øjnene. Den ved dette Valg begrænsede Opgave har ganske vist den store Fordel at være geometrisk bestemt; men det kan næppe betragtes som givet paa Forhaand, at man ved netop at vælge denne Indskrænkning i alle Tilfælde faar den mest levende Gengivelse af den fuldstændige Synsoplevelse ogsaa da, naar de afbildede Genstande er nære nok til at give de to Øjne forskellige Synsindtryk. Som Gengivelse af et enkelt Synsindtryk skulde man tro, at den perspektiviske Gengivelse kun vilde have Værdi, naar den ses fra det tilsvarende Øjepunkt; set fra andre Synspunkter vil det perspektiviske Billede give et Synsindtryk, som man ikke vilde faa ved se den afbildede rumlige Genstand faa nogetsomhelst Synspunkt. At dog Synet af Billedet fra forskellige Synspunkter kan tilfredsstille i det mindste dem, der er vant til at se Billeder, maa bero paa, at den Synsoplevelse af plane Figurer, med hvilke vi her beskæftiger os, og ved hvilken kongruente Figurer opfattes som ens, hos dem er bleven saa stærkt udviklet, at det tegnede eller malede plane Billede opfattes som det samme, fra hvilket Punkt man end ser det, og at man derved faar en bestemt Følelse af, at der existerer et Punkt i Rummet, for hvilket dette Billede er en virkelig perspektivisk Gengivelse af de afbildede Genstande i Rummet. Flytningen af Øjet kan derimod ikke, naar man holder sig til de geometriske Forhold, give det en Dybde, som det ikke selv har, og vel næppe illudere nogen anden Dybde end den, man bedst forestiller sig med det perspektiviske Øjepunkt til eneste Synspunkt. Det kan maaske lønne sig at se med det ene Øje fra dette Punkt; men stiller man sig andre Steder, faar man Brug for begge sine Øjne, da man maa have en fuldstændig Synsoplevelse af den plane Afbildning for at faa en rigtig Forestilling om, hvorledes den maa vise sig fra et Øjepunkt, hvorfra man da ikke selv ser den.

de er lige store. Den intuitive Vished, som man begynder med at have herom, hører, som vi skal se, til det første, hvorpaa man har bygget de ældste geometriske Betragtninger, man kender. I Forbindelse hermed staar Deling af Planen ved to Sæt Paralleler i Rektangler og Kvadrater.

Kap. VII.

Brug af Figurflytning i de ældste Tider; geometriske Redskaber.

Den Overgang, som vi her har omtalt, fra den Synsoplevelse af Fladefigurer, som først frembyder sig, til en nærmere Beskæftigelse med de Liniefigurer, der benyttes til paa en nemmere Maade at reproducere, beskrive og nøjere undersøge de hele Figurer, har efterhaanden fundet Sted fra de ældste geometriske Betragtninger indtil den euklidiske Geometri. Det skyldes dog ikke udelukkende Synsoplevelser, at man fra først af lagde mere Vægt paa selve de lukkede Figurer end paa deres Omrids, men vel ogsaa de økonomiske Formaal, for hvis Skyld man dyrkede Geometrien. For de ægyptiske Landmaalere f. Ex. kom det betydelig mere an paa de begrænsede Figurers Fladeindhold end paa Formerne af deres Omrids. Det gjaldt om, med saa god Tilnærmelse som muligt at faa den indenfor Omkredsen liggende Flade opfyldt med, eller tænke den opfyldt af, lige store Kvadrater og tælle disse. Omridsene selv kom da kun i Betragtning i Forhold til den større eller mindre Lethed, med hvilken dette lod sig gøre. Bedst lykkedes det for Rektanglers Vedkommende, som man snart lærte at maale ved Produktet af Rektanglets Længde og Bredde udtrykt i Længdemaal, hvad der i dette Tilfælde er det samme som to sammenstødende Sider af Omkredsen. Paa en Tid, da Omkredsens og dens Forms Sammenhæng med Arealets Størrelse endnu ikke var nøjere undersøgt, kunde det ligge nær, naar en anden Firkant var givet, at prøve paa anden Maade at benytte den foreliggende Figurs Omrids til at udmaale den „Længde“ og „Bredde“, som skulde multipliceres, og da er man faldet paa at prøve at anvende Middeltallene mellem modstaaende Sider. Naar denne Beregningsmaade anvendes paa Firkanter, der nærmer sig til at være Rektangler, giver den ganske gode Resultater, idet Resultatets Afvigelse fra det rigtige bliver lille af anden Orden, naar Vinklernes Afvigelser fra at være rette betragtes som smaa af første Orden. De, der af dette Held, som jo nok kunde efterprøves ved Skøn eller ved anden Deling af Figurerne, lod sig friste til at antage Fremgangsmaaden for almengældende, maatte imidlertid i andre Tilfælde komme til Resultater, som enten røbede Reglens Ubrugelighed og da maatte opfordre til mere indgaaende Undersøgelser, eller godkendtes i Henhold til gammel Slendrian og da røbede en fuldstændig Mangel paa Evne til selvstændig geometrisk Undersøgelse. I første Tilfælde nødtes man til paa Figuren ogsaa at indføre andre Linier end Omkredsens Sider; i sidste kunde det gaa saa vidt, at saadanne Regler fik en vis Lovkraft, og deres Udførelse lagdes i Hænderne paa Folk, som uden at bryde sig om Sagen selv kun tænkte paa at udføre, hvad der blev dem paalagt.

Sammenhængen med de Synsoplevelser, hvis nøjere Beskaffenhed Rubin har undersøgt, træder fuldstændigere frem ved den Samling af geometriske Sætninger, som er opbevaret os i de indiske Çulbasūtraer[1]), der er omtrent fra Pythagoras' Tid, men peger tilbage til en meget ældre Fortid; de indeholder nemlig overleverede rituelle Forskrifter for Konstruktionen af Altre samt de geometriske Sætninger, der ligger til Grund for disse.

Undtagelsesvis finder man her foruden Sætninger et geometrisk Bevis, nemlig for, at (Fig. 1) det ligebenede Trapez *ABCD* med Grundlinierne 30 (*CD*) og 24 (*AB*) og Højden 36 (*AE* eller *BF*) er 972 Kvadratenheder. Man omformer Trapezet til et Rektangel *GBFD* ved Flytning af Trekanten *BCF* til Stillingen *DAG*. Paa samme Maade kunde vi, Euklid's Disciple, bevise at Paralleltrapezet er lig Rektanglet, men kun under Forudsætning af, at vi først har faaet bevist selve Paralleltrapezets Existens, derunder Existensen af parallele Linier, eller saadanne, der overalt har samme Afstand, og dernæst Ligestorheden af de to Trekanter. Den sidste vises ved, at de har saadanne Sider og Vinkler lige store, at de maa være kongruente, og Beviserne for alt dette maa kunne føres tilbage til udtrykkelig opstillede geometriske Forudsætninger. Særlig kan det fremhæves, at man ved disse Beviser helt igennem behandler de forskellige Fladefigurers Omkredse, deres Siders Længder og Vinklerne imellem dem.

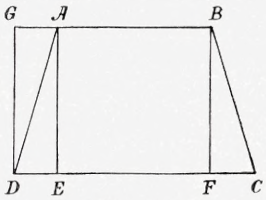

Fig. 1.

Apastamba derimod betragter alle disse Ting som umiddelbart indlysende. Han maa læse dem ud af et ved Synsoplevelser vundet intuitivt Billede. Dette falder ind under dem, som man mest umiddelbart har kunnet danne sig. Vi har blandt saadant udtrykkelig nævnt Billedet af et Rektangel; paa dette fremtræder Billedet af Paralleler med overalt lige store Afstande, og dertil knytter sig Billedet af et Paralleltrapez; i Kraft af Synsoplevelse af Symmetri faar man særlig et Billede af ligebenede Trapezer. Denne Symmetri viser ogsaa, at den Trekant, vi har kaldt *BCF*, er lige stor med Trekant *ADE*, der som fremkommen ved Deling af et Rektangel er lige stor med *DAG*. Alt dette har kunnet samle sig i et intuitivt Billede af Figuren, og det saa meget lettere, som man har indskrænket sig til en Fi-

[1]) I Cantor's Mathematikens Historie gøres efter Thibaut (Journal of the Asiatic Society of Bengal 1875, I) nærmest Rede for Baudhāyana Çulbasūtra. Bürk har i *Zeitschrift d. Deutsch. Morgenländ. Gesellschaft*, LVI (1901) gengivet den dermed i Hovedtrækkene stemmende Apastamba Çulbasūtra, til hvilken jeg har holdt mig i en Artikel, som er forelagt den II. internationale Kongres for Filosofi i Genève 1904 og optaget i Beretningen om denne Kongres.

gur, der forelaa med bestemte Maal. Dertil kommer da kun den logiske Slutning, at *BCF* og *DAG*, der begge er lige store med en og samme tredie, er indbyrdes lige store; men netop saadanne Slutninger gaar helt ind i Intuitionen, uden at man bliver sig dem særlig bevidst, hvad der jo vilde være en begyndende geometrisk Analyse. Den første Begyndelse til en saadan, som vi kender, er netop den her virkelig forekommende Udskillelse af Trekanternes Ligestorhed som Middel til at sikre Trapezets og Rektanglets. Det bemærkes, at saavel de benyttede intuitive Billeder, som selve det beskrevne Bevis, udelukkende knytter sig til Fladefigurerne. Stregfigurerne tjener kun til at fremstille disse ved deres Omrids.

Det er værd at prøve, om de øvrige geometriske Resultater, som Çulbasūtraerne meddeler, kan være vundne alene gennem lignende Intuitioner, forbundne med saadanne Omlægninger som den, der anvendes i dette eneste opbevarede Bevis. Da faar vi i det mindste en Forklaring paa, at de indiske Geometre overhovedet kunde naa saa vidt, særlig naar de Figurer, hvormed vi ser, at de beskæftiger sig, maatte lede Sans og Tanke hen i de Retninger.

Hvad der i de indiske Çulbasūtra'er vækker størst Opmærksomhed, er den deri indeholdte almindelige Udsigelse af den pythagoreiske Læresætning (Apastamba I,4), idet blot Siderne i en retvinklet Trekant ombyttes med Diagonalen og Siderne i et Rektangel. Tillige findes angivet en Del Grupper af hele Tal a, b, c, som tilhører Siderne i retvinklede Trekanter (Diagonal og Sider i Rektangler), idet $a^2 = b^2 + c^2$. Som noget, der staar i Forbindelse med denne sidste Viden, kan nævnes en jævnlig Brug af en Belægning af en Grund med Sten af en vis Form. Denne Form er tildels et Formaal for den geometriske Undersøgelse; men hvad man gaar ud fra som det simpleste, er Kvadrater. Man blev saaledes — som det sker ved den Brug af kvadreret Papir, der nu jævnlig gøres ved den indledende geometriske Undervisning — vant til at operere paa et Felt, der er inddelt i Kvadrater. Disse samler sig i større Kvadrater. I Apastamba II. og III. gøres Rede for Antallene af de smaa Kvadrater, som findes i to saadanne større Kvadrater og i disse større Kvadraters Differens. Denne fremstilles, idet de to Kvadrater lægges saaledes, at et Par Vinkler falder sammen, ved den samme Figur, som Grækerne benyttede paa samme Maade og kaldte Gnomon. Det Resultat, som man kan aflæse ved Betragtning af denne Figur, er det samme, som vi nu udtrykker ved de algebraiske Formler

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab, \tag{1}$$

$$\text{og} \quad a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b), \tag{2}$$

der kun er de forskellige Omskrivninger af det ved Gnomonfiguren under ét givne Resultat, som man faar ved at lade de hele Tal a og b betegne henholdsvis Siden i det mindre eller det større Kvadrat og Gnomons Bredde, eller Siderne i begge Kvadrater. Figuren kan da anvendes til ved geometrisk Omlægning eller Tælling af de smaa Kvadrater, som fylder de tre Figurer, at foretage de samme Operationer som man algebraisk udfører ved Formlerne. Naar man saaledes bestemmer en Gnomon, hvis Antal af smaa Kvadrater selv er et Kvadrattal, finder man en Løsning i hele Tal af den pythogoreiske Ligning $a^2 - b^2 = c^2$. Saaledes forstaar man, at der i Çulbasūtra'erne angives nogle Bestemmelser af Grupper af hele Tal for Sider i retvinklede Trekanter. Disse Talgrupper svarer til Gnomonbredderne 1 og 2. Behandlingsmaaden er den samme, som Grækerne anvendte. Den Løsning af den pythagoreiske Ligning, som man (PROKLOS S. 428) har tillagt PYTHAGORAS, svarer til Gnomonbredden 1, den, som man har tillagt PLATON, til Gnomonbredden 2. Det er dog ingenlunde min Mening at tillægge Inderne paa den Tid, der beskæftiger os, nogen saadan Sammenfatning i almindelige Regler[1]), men kun at pege paa, at de samme simple Forhold, som ligger til Grund for disse, har tilladt Inderne at finde hvert enkelt af de dem bekendte Resultater ved Tælling af de i Gnomonfigurer indeholdte Kvadrater.

At Çulbasūtra'ernes Forfattere og deres Forgængere ogsaa kunde gøre videre gaaende Anvendelser af Gnomonfiguren, ses navnlig af deres derpaa grundede Konstruktion af et Kvadrat lige stort med et givet Rektangel, som er den samme, som vi genfinder i EUKLID's II, 14, og som rimeligvis Pythagoreerne anvendte. I en ny

[1]) T. A. HEATH tillægger mig (EUCLID I S. 363) en saadan Anskuelse, fra hvilken han da ganske naturlig tager Afstand. Hans Anskuelse synes iøvrigt at stemme med en anden Hypothese om Indernes Opdagelse af forskellige pythagoreiske Trekanter og en dertil knyttet Opdagelse af den pythagoreiske Sætning, for hvilken BEPPO LEVI gør Rede i Bibliotheca mathematica 9^3 (1908). Som det ses af Çulbasūtra'erne, forstod Inderne til den intuitive Opfattelse af Figurens indre Symmetri at knytte den ogsaa nu brugelige Konstruktion af en ret Linie, som i Midtpunktet C af en ret Linie AB staar vinkelret paa denne: den skal ogsaa gaa igennem et andet Punkt D, som er lige langt fra A og B. I Stedet for Passer brugte man til Bestemmelsen af D en Maalesnor. Da det nu for at faa aldeles bestemte Regler for Konstruktion af Altre havde nogen Betydning, at alle derved brugte Maal fik bestemte Værdier, har man efter LEVI's Formodning prøvet at finde saadanne Snorlængder, at ikke blot AC og AD, der umiddelbart anvendes ved Konstruktionen af den vinkelrette, men ogsaa Katheten CD kunde udtrykkes ved et vist Maal, taget et helt Antal Gange. Forsøg herpaa lykkedes paa forskellig Maade, hvorved man fik de forskellige i Çulbasūtra'erne angivne retvinklede Trekanter med Sider udtrykte i hele Tal. For disse Tilfælde viste det sig, at Hypotenusens Kvadrat var lig Summen af Katheternes; ved en Induktion sluttede man da, at det samme ogsaa gjaldt om andre retvinklede Trekanter.

Jeg skal derimod bemærke for det første, at den Induktion, hvorved man skulde have almindeliggjort en Iagttagelse fra nogle specielle Tilfælde, ikke under de foreliggende Omstændigheder vilde kunne være ledet af en intuitiv Følelse af en Sammenhæng mellem de numeriske og geometriske Egenskaber, som i disse Tilfælde havde vist sig at være forbundne. Endvidere maatte man vente, at den pythagoreiske Sætning, hvis den paa denne Maade fra først af særlig var knyttet til en Konstruktion af Trekanter, ved hvilken de af disse dannede Rektangler er ganske ligegyldige, ogsaa vilde være bleven udtalt om Trekanter og ikke som i Çulbasūtra'erne om Rektangler. Af disse Grunde forekommer Hypothesen mig noget vilkaarlig. At B. LEVI har fundet den nødvendig, beror efter mit Skøn ogsaa paa en Undervurdering af det intuitive Overblik, som i det hele lægges for Dagen i Çulbasūtra'erne, og hvoraf navnlig den Omdannelse af et Rektangel til et Kvadrat, som vi straks skal omtale, er en betydelig Frugt. Çulbasūtra'erne røber for megen Figursans og Figurglæde til, at det skulde være nødvendigt at antage, at det er udelukkende praktiske Formaal, der, gennem de til disses Opfyldelse nødvendige forsøgsmæssige Konstruktioner, ret tilfældig og ved en ret dristig Induktion har ført til at opstille den almindelige pythagoreiske Sætning. Det er Figurglæde, som man lægger for Dagen ved at give sine Helligdomme netop saadanne Former, hvor de forskellige retvinklede Trekanter, som man kendte, og hvoraf en enkelt vilde være nok for Konstruktionens Skyld, samtidig forekommer hver paa sin Maade.

algebraisk Omskrivning af Gnomonfiguren, ved hvilken vi sætter Kvadratsiderne lig $\frac{a+b}{2}$ og $\frac{a-b}{2}$, og som nærmest svarer til den geometriske Omdannelse i Euklid II, 8, udtrykkes den alt betragtede Egenskab ved denne Figur ved[1])

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab. \tag{3}$$

Er $x^2 = ab$, kan x altsaa ifølge den ogsaa af de indiske Forfattere kendte pythagoreiske Sætning bestemmes som Kathete i en retvinklet Trekant, hvis Hypotenuse er $\frac{a+b}{2}$, medens den anden Kathete er $\frac{a-b}{2}$. — Det kan mærkes, at ved denne og de andre Konstruktioner, hvor Linierne og deres Længder benyttes, bliver det en retvinklet Trekant, man benytter, medens Sætningen oprindelig var knyttet til et Rektangel. Dette sidste var naturligt, under Opfattelsen af en Sandhed, som fra først af var knyttet til Fladefigurer, medens den Betragtning af retvinklede Trekanter, som vi nu er vante til, af sig selv har gjort sig gældende, da man skulde bruge Linier og deres Længder til geometrisk Konstruktion.

Çulbasūtra'erne giver os vel ingen direkte Oplysning om, hvorledes man var bragt til at opstille den pythagoreiske Læresætning; men en ældgammel kinesisk Tavle[2]) lærer os i hvert Fald, hvorledes man i tidlig Tid i Østasien er kommen til den netop gennem saadanne Figurbetragtninger og Figuromlægninger som dem, hvormed Çulbasūtra'ernes Forfattere paa anden Maade har vist sig fortrolige. Tavlens Alder lader sig vel ikke bestemme, og navnlig vides ikke, om dens Indhold skulde skyldes indisk Paavirkning, eller omvendt den derpaa udtrykte Viden kan have forplantet sig fra Kina til Indien; men i alle Tilfælde er den et Vidnesbyrd om gammel asiatisk Anvendelse af den intuitive Figuropfattelse, hvormed vi her beskæftiger os.

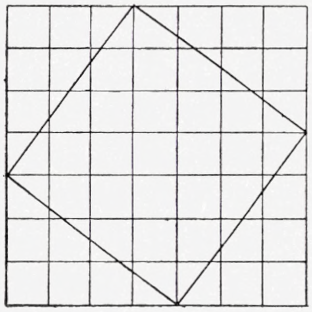

Fig. 2.

Figuren er efter Beskrivelsen som Fig. 2. Den fremstiller aabenbart et Kvadrat, som ved 6 Paralleler med hvert Par modstaaende Sider er delt i 49 lige store Kvadrater. At den indskrevne Firkant, hvis Vinkelspidser deler den givne Side i Stykkerne 3 og 4 ligeledes er et Kvadrat, vil ogsaa uden nogen nærmere Begrundelse have været indlysende paa Grund af den ganske ensartede Bestemmelse af dens Sider og Vinkler. De Trekanter, som ved Siderne i det mindre Kvadrat skæres bort af det store, er hver Halvdelen af et Rektangel med Siderne 3 og 4. Tilsammen udgør disse Trekanter altsaa saa meget som 24 smaa Kvadrater. Det indre Kvadrat, der til Side har Diagonalen i de nævnte Rekt-

---

[1]) For $a = 4$, $b = 3$ kan den med (3) stemmende Formel $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\,ab$ ogsaa aflæses af den Fig. 2 afbildede gamle kinesiske Tavle, der saaledes ogsaa fører til den her skildrede Omdannelse af et Rektangel.

[2]) Se Biot's Artikel i Journal Asiatique 1841, S. 601, Note 1.

angler, er altsaa netop lig Summen 25 af Kvadraterne 9 og 16 paa disse Kvadraters Sider. Dette er alt noget, som enhver, der blot er i Besiddelse af de intuitive Billeder af Rektangler og Kvadrater, kan læse, eller bringes til at læse, ud af Tavlens Figur, uden forud at være i Besiddelse af Kendskab til nogen geometrisk Sætning.

Det er aabenbart, at man her kan ombytte Tallene 3 og 4 med hvilke som helst hele Tal, a og b. Den, der har bemærket dette, vil som Çulbasūtra'ernes Forfattere tro sig i Besiddelse af den almindelige pythagoreiske Sætning; thi paa den Tid vil det ikke være faldet nogen ind, at Siderne a og b i et Rektangel ikke altid har et fælles Maal, ved hvilket de paa en Gang kan udtrykkes i hele Tal. I Virkeligheden er det i det Bevis, som vi har læst ud af Figuren, og som man næppe er faldet paa at give noget Udtryk i Ord, ganske ligegyldigt, om Diagonalen $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ da ogsaa bliver et helt Tal. Det er dog muligt, at man kan have sat Pris paa ogsaa at kunne afsætte de c^2 smaa Kvadrater, hvoraf det indre Kvadrat da kommer til at bestaa; men man kendte jo ogsaa, eller fandt efterhaanden, andre Tilfælde af denne Natur. I Çulbasūtra'erne anvendes den pythagoreiske Sætning dog ogsaa paa Tilfælde, hvor dette ikke gælder, f. Ex. til Multiplikation af et Kvadrat med 3—6.

Den Begrundelse af den pythagoreiske Sætning, som, omend foreløbig kun for $a = 3$, $b = 4$, udtrykkes ved den gamle, kinesiske Tavle, har fundet Udbredelse i de østlige Lande og holdt sig i den senere indiske Mathematik. Denne er vel ved Brugen af den indiske Talskrivning, ved Laan fra den græske Mathematik og ved sit begyndende Tegnsprog naaet betydelig videre i Regnekunst, Arithmetik og Algebra, end man var paa Çulbasūtra'ernes Tid; men paa noget Trigonometri nær, som slutter sig til den græske, har Geometrien ikke hævet sig synderlig over det i Çulbasūtra'erne naaede Standpunkt. Til dette knytter sig saaledes nogle Sammensætninger af retvinklede Trekanter, hvis Sider udtrykkes ved hele Tal, til Firkanter med indbyrdes vinkelrette Sider, som de har benyttet i deres Trigonometri[1]). Den sidste betydelige Repræsentant for den yngre indiske Mathematik Bhāskara, f. 1114 e. Kr., fører for den pythogoreiske Sætning et Bevis, der kan betragtes som en Omdannelse af det, som kan aflæses af den kinesiske Tavle, men en saadan, som knytter det nærmere til en retvinklet Trekant end til et Rektangel. De fire Trekanter $\frac{1}{2}ab$, som paa Tavlen ligger udenfor Hypotenusens Kvadrat medtages nemlig ikke, men de, der udfylder to paa hinanden følgende af disse til Rektangler, lægges, som Fig. 3 viser, over paa de to andre Sider i Hypotenusens Kvadrat, som derved „øjensynlig", hvad Bhāskara netop siger, omdannes til Kvadrater paa Katheterne. Ogsaa Bhāskara indskrænker denne Eftervisning til Til-

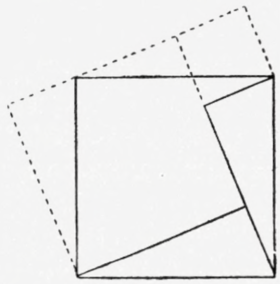

Fig. 3.

[1]) Se min Afhandling: *L'arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens.* Bibliotheca mathematica 5³ (1904).

fældet $a = 3$, $b = 4$, men da dette her bliver ganske uvæsentligt, mener han med Rette derved at have eftervist, hvorledes den almindelige pythagoreiske Sætning lader sig bevise; med samme Ret kan det samme siges om det paa den kinesiske Tavle indeholdte. Før Bhāskara's Tid har iøvrigt den arabiske Mathematiker Abul-Wafā bevist Sætningen ved væsentlig den samme Omlægning, som ogsaa kan være kommen til ham fra det fjernere Østen.

I sine forskellige Skikkelser bliver dette Bevis saa anskueligt derved, at man kun opererer med Omlægning af synsoplevede Fladefigurer. Yderligere kan det anskueliggøres derved, at man udskærer Hypotenusens Kvadrat og af dette de Trekanter, som skal flyttes, i Træ eller Pap og virkelig flytter dem. Det kan iøvrigt bemærkes, at Øvelse i Flytninger af Fladefigurer, som Çulbasūtra'erne havde givet andre Exempler paa, faas ved det saakaldte kinesiske Spil, hvis Navn peger hen paa den østasiatiske Oprindelse, men om hvis Alder jeg ganske vist intet ved. Det bestaar i den Skikkelse, hvori jeg kender det, af de i Fig. 4 angivne forskellige Figurer, hvori et Kvadrat er sønderskaaret, og som skal sammenlægges til nye Figurer efter Fortegninger, som kun indeholder den ønskede nye Fladefigur, men ikke Skillelinierne mellem de Stillinger, de enkelte Stykker skal indtage i denne. Det er aabenbart ogsaa her Opfattelse af og Evne til at operere med Fladefigurer, som det kommer an paa, saa længe man kun anvender Skøn og ikke mathematisk Analyse. Jeg antager, at den Øvelse, som jeg i min tidlige Ungdom erhvervede mig i at behandle dette Spil, har bidraget til langt senere at aabne mine Øjne for den Betydning, Figuromlægninger endnu havde i den græske geometriske Algebra.

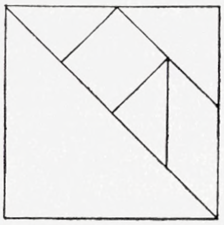

Fig. 4.

De Omlægninger af Fladefigurer, som findes i Çulbasūtra'erne, spiller ogsaa en stor Rolle i den ældste græske Mathematik og særlig anvendte Grækerne Gnomonfiguren paa samme Maade, som det sker i Çulbasūtra'erne. Om denne Overensstemmelse skulde hidrøre fra en Overlevering eller bero paa en fælles menneskelig Tilbøjelighed til ensartede Synsoplevelser og derved til at danne de samme intuitive Billeder, lader sig næppe afgøre. En enkelt Anvendelse kan ved sin praktiske Nytte i Løbet af lange Tider have trængt sig viden om og da paa forskellig Maade givet Impulser til ensartede Udviklinger. Allerede Pythagoreerne er imidlertid, som vi snart skal se, gaaet videre i Brugen af Gnomon end Çulbasūtra'erne og har dertil knyttet en hel „geometrisk Algebra“. Ved Brugen af den spillede ogsaa den „pythagoreiske Læresætning“ en Rolle. Om end den Overlevering, der henfører dennes første Optræden hos Grækerne til Pythagoras selv, er draget i Tvivl, viser den Sikkerhed, hvormed allerede Hippokrates fra Chios anvender den, at Grækernes Kendskab til den ikke kan være meget yngre end Pythagoras (Oversigt 1913, S. 467). Da tilmed Grækerne tidlig maa have kendt Ægypternes Anvendelse af Trekanten med Siderne 3, 4 og 5 til Konstruktion af rette Vinkler, maa vistnok senest Pythagoras eller hans alleræeldste Disciple i deres vaagnende Forskertrang have søgt at faa en Begrundelse af det derved benyttede Faktum, og da kunde Vejen til den almindelige pythagoreiske Sætning ikke være lang. Den praktiske Brug af Trekanten (3, 4, 5) kan ogsaa skrive sig fra fjernere østlige Lande, men den almindelige Sætning og dens Begrundelse kan næppe være fulgt med herfra; thi i den græske Geometri findes intet Spor af en saadan Begrundelse, som ligner den, der udtrykkes ved den kinesiske Tavle, eller som viser Slægtskab med BHĀSKARA's eller ABUL-WAFĀ's senere Beviser. Kendte Grækerne før EUKLID et saadant Bevis, vilde der nemlig ikke have været Anledning for denne til, som PROKLOS siger (S. 426,12), at opfinde det fine, men mindre anskuelige Bevis, som findes i Slutningen af hans første Bog. For et saadant har han Brug her, da det gælder om at have Sætningen til Raadighed forud for den almindelige og af Spørgsmaal om Leddenes Kommensurabilitet uafhængige Proportionslære i V. Bog. Dertil kunde han godt have benyttet et saadant Omlægningsbevis som de asiatiske, hvis han havde kendt et saadant, idet han kunde omskrive Omlægningerne paa samme Maade, som han gør det ved Brugen af Gnomon. Et nyt Bevis blev derimod nødvendigt, naar der i det ældre græske (PYTHAGORAS'?) var gjort Brug af Proportioner eller ligedannede Figurer. Det er derfor rimeligt at antage, at dette har været Tilfældet (Oversigt 1913, S. 472); i Tilslutning til Ægypterne havde Grækerne nemlig, som vi senere skal se, tidlig begyndt at beskæftige sig med saadanne Figurer.

Grundlaget for den nys nævnte geometriske Algebra maa man lære at kende af II. Bog af EUKLID's Elementer. Selve den Methode, som dette Navn udtrykker, træder her dog kun indirekte frem. Det er nemlig ikke Fremstillingen af en Methode og Regler for dens Anvendelse, som EUKLID giver. Her som andensteds nøjes han med at bevise Sætninger, som skal bruges, og først af senere Sætninger, Theoremer eller Problemer, ser man, at de virkelig finder Anvendelse. Her er tilmed Tale om en Methode, som var vel kendt før hans Tid, og hvori han maa forudsætte nogen Øvelse hos sine Lærlinge, der for Begyndelsesgrundene kan have erhvervet den ved den tidligere Undervisning i Logistik og Metretik[1]) og senere faaet den suppleret ved Øvelser knyttede til hans egen Bog. Uden det vilde de ikke godt kunne følge de talrige Anvendelser, som han i X. Bog gør af Ligninger af 2. Grad, og endnu mindre blive sat i Stand til at læse videregaaende Værker som Keglesnitslæren, hvor vi hos APOLLONIOS ser, at den geometriske Algebra anvendes næsten helt igennem. I II. Bog er EUKLID's Formaal derimod at give de Sætninger, som bruges ved Udførelsen af de herhen hørende Operationer, en helt ny Begrundelse. Naar Pythagoreerne gjorde saadanne Anvendelser af Gnonomfiguren som dem, vi S. 56 (254) har peget hen paa, og naar de ved Flytning af Rektangler dannede de Gnonomfigurer, der anvendes ved Fladeanlæg, maa de have forestillet sig virkelige mekaniske Flytninger. At ombytte disse med postulatbestemte Konstruktioner er derimod næppe faldet nogen ind før MENAICHMOS, og det er det, som EUKLID gør i II. Bog. I første Del af I. Bog har han paa en Maade, som vi skal

[1]) Se PAUL TANNERY: *L'éducation platonicienne.* Revue philosophique 10—12 (1880—81).

omtale i næste Kapitel, overvundet de store Vanskeligheder, som Dannelsen af Grundlaget for en saadan Behandlingsmaade volder, og i Slutningen har han bevist de for den geometriske Algebra nødvendige Arealsætninger, derunder den pythagoreiske. En konstruktiv Behandling af de Rektangler og Kvadrater, hvormed den geometriske Algebra opererer, kan derfor ikke volde ham nogen alvorlig Vanskelighed i II. Bog; men det er dog herpaa og paa dennes omhyggelige Udførelse, Hovedvægten lægges. I 4. er det f. Ex. Konstruktionen af Gnomonfiguren og Beviset for, at de enkelte dannede Figurer er Rektangler og Kvadrater, som lægger Beslag paa Forfatterens Omhu. Den logiske Sammenhæng med de euklidiske Definitioner fastholdes ved Opstilling af Sætningerne 2. og 3., som nærmest er specielle Tilfælde af 1. Denne indeholder nemlig den geometriske Fremstilling af $a(b+c+d\ldots) = ab + ac + ad\ldots$, hvor alle Produkterne er Rektangler mellem samme Paralleler. I 2. og 3. vises det samme i særlige Tilfælde, hvor et af Rektanglerne er ombyttet med et Kvadrat; thi Rektangler og Kvadrater har hver sin Definition, saa de sidste ikke opfattes som specielle Tilfælde af de første; maaske har den ældre geometriske Algebra ogsaa gjort særlig Brug af 2. og 3.

Paafaldende er det, at, som HEATH gør opmærksom paa (I, S. 377), de 10 første af Bogens 14 Sætninger trods deres nære Sammenhæng bevises helt uafhængig af hinanden i stærk Modsætning til EUKLID's synthetiske Behandling af de øvrige Bøger. Det turde hidrøre fra, at EUKLID i disse 10 Sætninger, der særlig ligger til Grund for den geometriske Algebra selv, vil vise, at hans Behandling af Geometrien kan give hver af dem og de anskuelige Figurer, hvorved man udtrykte dem, et fast rationelt Grundlag, men her ikke bekymrer sig om deres indbyrdes Sammenhæng. Da flere af disse Sætninger ikke bruges i det følgende, er disse endog kun medtaget af Hensyn til de Anvendelser, som man alt forstod at gøre, og som han ikke nævner. Jeg har saaledes i 1. Afsnit af „Keglesnitslæren i Oldtiden", vist at Sætningerne[1]) 9. og 10. laa til Grund for den sukcessive Dannelse af de fra Pythagoreernes Tid kendte Kædebrøkskonvergenter til $\sqrt{2}$, og deres virkelige Sammenhæng med disses Bestemmelse er bekræftet ved KROLL's senere udkomne Udgave af PROKLOS' Kommentar til PLATON's „Stat". Det er ogsaa let at paavise den Anvendelse, man har gjort af Sætning 8., nemlig til Bevis for den Løsning i hele Tal af Ligningen $x^2 + y^2 = z^2$, som man har tillagt PLATON. Allerede den simple Gnomonfigur vil, naar man tager hele Tal til Kvadratsider og giver Gnomon Bredden 1., vise, at de ulige Tal er Differenser mellem to paa hinanden følgende Kvadrattal, og at saaledes de ulige Kvadrattal giver en Løsning af Ligningen, nemlig den pythagoreiske. Den platoniske vilde vel faas ved Gnonombredden 2; men det samme opnaas i Sætning 8. ved dels indenfor, dels udenfor samme Kvadrat at lægge en Gnomon med Bredden 1. Sætningen, hvis geometriske Form i umiddelbar Oversættelse til det nuværende algebraiske Sprog vilde lyde

---

[1]) Mon man iøvrigt ikke før EUKLID skulde have aflæst disse Sætninger af samme Figur, som benyttes i 8.? Dette forekommer mig at have ligget den geometriske Algebra nærmere. (Se HEATH I S. 394).

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4\,ab,$$

giver, naar man sætter Gnomonbredden $b = 1$ og for a tager et Kvadrattal, den saakaldte platoniske Løsning.

En særlig Interesse frembyder Sætningerne 5. og 6., da de angiver de algebraisk-geometriske Omformninger, hvorved man udfører det elliptiske og det hyperbolske Fladeanlæg, som er den græske Form for Løsningen af blandede Ligninger af 2. Grad. Og dog er det ikke til dem, at EUKLID knytter Løsningen af disse Opgaver; men han opsætter det, til han i VI. Bog kan give denne Opgave en almindeligere Skikkelse. Da denne Almindeliggørelse slet ingen Rolle spiller ved de senere Anvendelser af Fladeanlæg, men han i X. Bog holder sig til de Operationer med Rektangler og Kvadrater, som man lærer at kende i II,5. og 6., er dette et fremtrædende Eksempel paa, at han i II ikke stræber udtrykkelig at fremdrage Nytten af den geometriske Algebra. Denne Nytte kunde han ogsaa betragte som bekendt, da Fladeanlæg efter EUDEMOS var en Overlevering fra Pythagoreerne (PROKLOS, S. 419,15).

Efter at EUKLID i de ti første Sætninger har ført saadanne Beviser for den geometriske Algebra, som passer ind i hans System, anvender han den i de fire sidste til at bevise saadanne geometriske Sætninger, for hvilke han allerede har Brug. 12. og 13. supplerer den pythagoreiske Sætning med Bestemmelsen af en Side i en vilkaarlig Trekant ved de to andre og Projektionen af den ene paa den anden. Det er hertil, at han har haft øjeblikkelig Brug for den geometriske Algebra. 14. indeholder den Omdannelse af et Rektangel til et Kvadrat, som vi allerede fandt i Çulbasūtra'erne. I 11. højdeler han en ret Linie, hvad han i IV, 10. og 11. faar Brug for ved Konstruktionen af en regulær Femkant. Dette udføres ved Hjælp af II, 6 altsaa i Virkeligheden ved et hyperbolsk Fladeanlæg; men da dette først direkte opstilles i VI. Bog, maa han nøjes med her at behandle dette specielle Tilfælde for sig. Direkte anvendes Sætningerne 5. og 6. til i III, 35. og 36., at bevise Sætningerne om et Punkts Potens med Hensyn til en Cirkel; men bortset fra de i VI. Bog almindeliggjorte Fladeanlæg tager EUKLID ikke i II. Bog Hensyn til de Former for geometrisk Algebra, som han derefter i X. Bog faar Brug for, men opstiller dem først som Hjælpesætninger til denne (se Kap. XII).

Praktisk udføres Figurflytninger ved mekaniske Tegneredskaber. Det har derfor i denne Undersøgelse stor Betydning saa vidt muligt at komme til Kundskab om, hvilke mekaniske Hjælpemidler man brugte i Tiden før PLATON, og hvorledes man praktisk anvendte dem, før de dermed udførte Konstruktioner fik den theoretiske Betydning, som de har i EUKLID's Elementer. Brugen af Lineal knytter sig dertil, at en ret Linie uden at forandres kan flyttes fra et Sted til et andet. Før man lavede Linealer, brugte saavel Indere som Ægyptere en strammet Snor, Maalesnor, til Konstruktioner af rette Linier i Marken. Gjordes Maalesnoren fast i det ene Endepunkt, tjente den som Passer, og Længder lod sig derved maale og flytte fra et Sted til et andet. Vi har (S. 57 (255), Note) set, at Çulbasūtra'erne foreskrev virkelige geometriske Anvendelser heraf, og nogle saadanne kendte Ægypterne sikkert ogsaa, deriblandt Konstruktion af en ret Vinkel som Vinkel i en Trekant med Siderne 3, 4, 5.

Trangen til en fast Lineal, hvis Nøjagtighed kunde sikres ved forskellige Prøver, gjorde sig naturligvis tidlig gældende i Bygningshaandværkerne baade ved Udførelsen af Arbejdet og ved Lederens Tegninger. Dermed forbandt Ægypterne tidlig Brug af Vinkellinealen; den ligebenede Vinkellineal fik hos Grækerne Navnet Gnomon, hvorved man ogsaa betegner den alt omtalte geometriske Figur af samme Form (Fig. 5): Differensen mellem to Kvadrater med en fælles Vinkel. En saadan ligebenet Vinkellineal findes paa ægyptiske Afbildninger og har vistnok været brugt af Murerne som den Dag i Dag til at afsætte og prøve rette Vinkler. Den har imidlertid faaet en videregaaende Anvendelse, som forklarer dens Navnefællesskab med et astronomisk Apparat, nemlig en lodret Stang, ved hvis Skygge man bestemmer Solens Højde, dog uden derfor at udtrykke denne i Vinkelmaal. Vinkelbegrebet havde man nemlig den Gang ikke, men en Vinkels Kotangens gav en lige saa god Bestemmelse af den Stilling, som Synslinien til Solen danner med Horizonten. Først langt senere, da Trigonometrien opstod, sattes denne Bestemmelse i Forbindelse med egentlig Vinkelbestemmelse, og det peger netop hen paa den her omtalte indirekte Vinkelbestemmelse, at den ældste Tangens- eller efter sin Form Kotangenstavle fremtræder som en Tavle over de Gnomonskygger, der svarer til givne Solhøjder, udtrykte i Vinkelmaal[1]). Men ogsaa det førstnævnte Gnomonapparat har kunnet benyttes og sikkert været benyttet til indirekte Vinkelbestemmelser, det er til Bestemmelser af to hinanden skærende rette Liniers Stilling mod hinanden. Nyere Ægyptologer har nemlig fundet, at den saakaldte Seqt, som Ægypterne brugte til den Slags Bestemmelser, ikke, som man tidligere troede, var en Kosinus, men den vandrette Kathete CB i en retvinklet Trekant, hvis Højde AC havde en given Værdi b, altsaa $b \cot B$. Denne lader sig netop aflæse paa en Gnomon (Fig. 5) med en Snor befæstet i A, eller naar man brugte Linien AB som Sigtelinie[2]), og Methoden er vistnok anvendt til Bestemmelse af Heldningen af en Pyramides Sideflader, eller rettere til at give disse en bestemt Heldning. Bredderne af de Trin, som under Opførelsen dannede Sidefladerne, har netop ladet sig bestemme paa denne Maade.

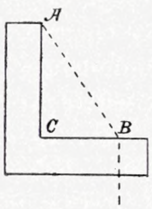

Fig. 5.

Gnomonfiguren eller Vinkellinealen vedblev ogsaa at høre med til de græske Geometres Tegnerekvisiter, saaledes som M. P. C. Schmidt har vist[3]). Af de Citater og bevarede Afbildninger, som han meddeler, fremgaar det, at Grækerne anvendte Gnomonlinealen ved Siden af Linealen paa en Tid, da man endnu kun kendte Passeren i Form af M a a l e passer og vistnok brugte en Snor med et fast

[1]) Se A. A. Bjørnbo: Al-Chwârizmi's trigonometriske Tavle, i Festskrift til Zeuthen. 1909.

[2]) Paa denne Maade brugtes Gnomon som „Jakobstaven" i Middelalderen.

[3]) Max P. C. Schmidt: Kulturhistorische Beiträge zur Kenntnis des griechischen und römischen Altertums I (1906) S. 42—47.

Punkt til at tegne Cirkler. Naar man da spørger om, hvorledes Pythagoreerne tilvejebragte deres Figurer, skal man ikke derved tænke paa Brug af Tegnepasseren. Deres geometriske Undersøgelser, saadanne som findes i Slutningen af Euklid I. og især i II., knyttede sig for en stor Del til retliniede og retvinklede Figurer, og disse lod sig tegne ved Lineal og Gnomon, samt ved at afsætte Maal paa disse Linier og maale Afstande, og dette sidste lod sig udføre ved en Maalesnor eller en Maalepasser. Selv om man — f. Ex. for at finde en Kathete i en retvinklet Trekant, naar den anden Kathete og Hypotenusen er givne — skal finde et Punkt af en ret Linie, der har en given Afstand fra et givet Punkt udenfor, kan dette ske ved en Maalepasser. Iøvrigt vides ikke engang, hvor megen Vægt Pythagoreerne lagde paa den nøjagtige Udførelse af Figurerne. Den største Interesse knytter sig nemlig til disses Anvendelse til tydelig og almindelig Fremstilling af Løsning af algebraiske Opgaver, særlig af Ligninger af 2. Grad. Selv om man ser bort fra Anvendeligheden ogsaa paa inkommensurable Størrelser, giver deres Fladeanlæg en anskuelig Fremstilling af den arithmetiske Løsning, som Skridt for Skridt svarer til den, der udtrykkes ved vore litteral-algebraiske Formler, og saaledes da kunde gøre en lignende Nytte som disse nu og give Regneren Overblik over, hvorledes han kunde behandle numeriske Opgaver.

Anderledes har det forholdt sig med Astronomiens Anvendelse af geometriske Konstruktioner, der jo netop skulde give den Nøjagtighed i Bestemmelserne, som man først efter Trigonometriens Opfindelse blev i Stand til at opnaa ved Regning. Hvorvidt man efterhaanden naaede paa den Maade, ses af Ptolemaios' Analemma[1]), hvor de samme geometriske Operationer — tildels saadanne, som nu anvendes i deskriptiv Geometri — bruges til paa en Gang at finde mekaniske Bestemmelser af Sider eller Vinkler i sfæriske Trekanter og de trigonometriske, som nu skulde afløse dem. Her var der rigelig Brug for Cirkler, til hvis Tegning man naturligvis nu anvendte omhyggelig forarbejdede Tegnepassere. Det er da ogsaa fra et astronomisk Værk — fra et tidligere Stadium end det i Analemma naaede — at Eudemos nævner det første Exempel paa en saadan Anvendelse af Cirkler, ved hvilken deres Skæringspunkter benyttes, den første Anvendelse af et grafisk Konstruktionsmiddel, som snart skulde faa stor Betydning ogsaa ved Brug af andre Kurver. Det er (se Proklos S. 283,7 og 333,5) Oinopides fra Chios, der ifølge Eudemos Beretning først skal have angivet Konstruktioner ved Passer og Lineal af en vinkelret fra et givet Punkt til en given Linie og af en ret Linie, der i et givet Punkt af en given ret Linie danner en given Vinkel med denne. Jeg har tidligere (Oversigt 1913, S. 441) været i Tvivl om, hvorvidt Eudemos kunde have Ret i, at denne Forfatter fra sidste Halvdel af det 5. Aarhundrede skulde have været den første, som har anvendt saa simple Konstruktioner, for hvilke Pythagoreerne maatte antages at have haft megen Brug; men det bliver forstaaeligt, naar man erindrer, at foruden Linealen Gnomonlinealen stod til deres Raadighed. At de ikke, som senere

[1]) Se min Afhandling i Bibliotheca mathematica 1^3 S. 20.

OINOPIDES, har tænkt paa at bruge Cirkler og deres Skæringspunkter som Hjælpemidler ved Konstruktion af retvinklede Figurer, hindrer naturligvis ikke, at de ved den nysnævnte Snorkonstruktion har kunnet tilvejebringe Cirkler for disses egen Skyld. Ved den første af de anførte Konstruktioner bemærker PROKLOS, at OINOPIDES paa archaisk Vis kalder den søgte Linie τὴν κάθετον κατὰ γνώμονα, en Betegnelse, der turde staa i Forbindelse med, at man tidligere har udført denne Konstruktion ved en Gnomonlineal. Iøvrigt siges denne Konstruktion at være angivet i et astronomisk Værk, og det samme turde ogsaa have været Tilfældet med den anden; men derved er Opmærksomheden bleven henledet paa den gode Brug, man kan gøre af Tegnepasseren ogsaa i Konstruktioner med med rent geometrisk Formaal. Saadanne Anvisninger er vistnok særlig fulgte af hans Discipel, i det mindste Landsmand, HIPPOKRATES, der gik saa vidt i Brugen af Konstruktioner, at han endog forsøgte at kvadrere Cirklen ved en Konstruktion og virkelig opnaaede at konstruere kvadrerlige Halvmaaner. Derfor behøver Passeren dog ikke straks helt at have fortrængt Gnomonlinealen hos Mathematikerne i Athen, der jo nærmest sluttede sig til Pythagoreernes Arbejde. Som vi senere skal se, finder et af EUKLID's Postulater sin Forklaring i en saadan ældre Brug af Gnomon, som i sin Tid har overflødiggjort Anvendelsen af Passer til de to Opgaver, som først OINOPIDES løste ved dens Hjælp.

Et andet Exempel paa, at man i tidligere Tid brugte andre Hjælpemidler end Lineal og Passer, er den saakaldte νεῦσις: Indskydning af et ret Liniestykke af given Længde mellem to rette eller krumme Linier, saaledes at Liniestykket selv eller dets Forlængelse gaar gennem et givet Punkt. Den maatte foretages ved at prøve sig frem med en Lineal, paa hvilken to Mærker afsættes med den givne Afstand.

Ved alle de her nævnte Redskaber flyttes en Figurdel uden nogen Forandring fra et Sted til et andet. EUKLID, der, som vi nu skal se, netop søger at undgaa eller omgaa den direkte Brug af en saadan mekanisk Flytning, ja endog Henvisning i sine Beviser til Muligheden af saadanne, faar ingen Anledning til at nævne noget af disse Redskaber, end ikke Lineal og Passer.

Kap. VIII.

Figurflytning hos EUKLID.

Paa PLATON's Tid var man ad de her antydede Veje kommen ret vidt i Behandlingen af saadanne færdige plane Figurer, som man fra det senere euklidiske Standpunkt vilde kalde sammensatte, fremfor alt af Rektangler og Kvadrater, samt Figurer, som kunde dannes ved Sammensætning, Sønderskæring og Flytning af disse. Mindst af alt vilde man nære nogen Tvivl om Gyldigheden af Beviser støttede paa en saadan Flytning, om hvis Mulighed man havde en paa Sanseoplevelser grundet intuitiv Vished. Disse Operationer var vel fra først af mest anvendte paa færdige Fladefigurer; men under Undersøgelsen af disse var man ogsaa kommen til at beskæftige sig med deres Begrænsninger, for retliniede Figurers Vedkommende med Sider, og, som vi senere skal se, efterhaanden ogsaa med Vinkler af forskellige Størrelser; rette Vinkler hørte ligesom Paralleler til de første Forestillinger, som allerede knyttede sig til Forestillingen om et Rektangel. De Beviser, som førtes paa Grundlag af saadanne Forestillinger, maatte i det hele være gode og tilforladelige nok til at forklare PLATON's Pris af Mathematiken i „Staten", naar man tillige erindrer, at der allerede da existerede „Elementer" ordnede saaledes, at man efterhaanden sikrede sig Rigtigheden af det, som man dernæst benyttede. Berømmelsen var dog en saadan, at den maatte tilskynde Mathematikerne til nøjere at prøve, i hvilken Grad den var fortjent, navnlig prøve, om en saadan Ordning var naaet, at man virkelig begyndte med de simpleste Forestillinger og fik alle Forudsætninger med, og ellers tilstræbe at opnaa dette. Derunder lærte man at formindske Antallet af Forudsætninger og at stræbe at udelukke saadanne, som man ikke kunde give et bestemt Udtryk, og som derved vilde berøve Lærebygningen den rent rationelle Karakter.

Hvad der skulde gøres, maatte findes ved en Analyse af de mere eller mindre sammensatte Forestillinger, hvorpaa man byggede som sikre Forudsætninger; de simpleste Forestillinger, hvortil man derved førtes tilbage, skulde danne en ny Række Forudsætninger, ved hvilke man gennem Synthese først og fremmest beviste det, man tidligere havde bygget paa. Kravet herom er saa naturligt, at det ogsaa før den Tid havde gjort sig gældende og f. Ex. havde ført til det nysnævnte Vinkelbegreb. Da man nu var bleven sig dette Krav mere bevidst, var et Hovedpunkt, hvorimod det maatte rettes, Beviset for Existensen af de Figurer, hvormed man hidtil havde opereret, og den maatte bevises paa Grundlag af Paastande opstillede i Definitioner og Postulater om Existens af simplere Figurdele, rette Linier og Cirkler og visse Egenskaber ved disse. Med saadanne Existensbeviser begynder ogsaa EUKLID den egentlige Behandling, lige efter at han har opstillet Forudsætningerne. Han kan straks ved en med disse stemmende Konstruktion bevise Existensen af ligesidede Trekanter (I,1); han stiler dernæst henimod ved Konstruktion at bevise Existensen af rette Vinkler og af parallele Linier og bliver først derved i Stand til paa samme Maade at bevise Existensen af Rektangler og Kvadrater, det Materiale, der havde udgjort en saa vigtig Bestanddel af den ældre Geometri, og hvormed nu ogsaa han ad sin mere rationelle Vej har vundet Ret til derefter at operere i Slutningen af I. og som omtalt i hele II. Bog.

Ved Siden af det, som Postulaterne indeholder, har han dog ogsaa Brug for det ved de „Almindelige Begreber" karakteriserede Størrelsesbegreb, for hvis Anvendelse paa Geometrien, der særlig banes Vej ved Nr. 7: „Størrelser, der dækker hinanden (*τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα*), er ligestore". Man har — og dette gælder ogsaa mig selv i min „Mathematikens Historie“ — været tilbøjelig til at behandle dette Axiom, som om der stod „Størrelser, der kan bringes til Dækning“, altsaa det, som vi nu kalder kongruente Størrelser, der ved mekanisk Flytning kan bringes til Dækning. Dette er det Hjælpemiddel, som Praktikeren bruger, det, som vi har set, at de ældre Geometre i Indien og Grækenland anvendte, eller dog tænkte sig anvendt, og som man ogsaa i den nuværende Skoleundervisning tænker sig anvendt som den første Prøve paa geometriske Størrelsers Ligestorhed. Det var naturligvis ogsaa dette, der i Virkeligheden gav Euklid Sikkerhed for, at der existerer praktiske Forhold, hvorpaa den Geometri, som han bygger paa sine Forudsætninger, kan anvendes; men som den gode Platoniker, han er, vil han skrive en Geometri paa Grundlag af Forudsætninger, som han selv opstiller paa en saa selvstændig Maade, at de bliver uafhængige af de praktiske Forhold, hvorfra de er laante, og ikke alene beregnede paa praktiske Anvendelser af Geometrien. Han tør altsaa kun anvende de Operationer, som han betinger sig ved sine Definitioner og Postulater, og i disse forekommer Ordet *ἐφαρμόζειν*, der baade kan betyde „anbringe“ (for at prøve om en „Dækning“ finder Sted) og „være i Dækning med“, i k k e. Han kan altsaa ikke mekanisk anvende den ved den transitive Betydning af Ordet antydede Operation, men kun prøve, om Figurer, der kan tilvejebringes ved Konstruktioner, som stemmer med hans udtrykkelige Forudsætninger, er i den ved den intransitive Betydning angivne Tilstand.

Det samme gælder om det ved „Almindelige Begreber“ 8. opstillede Kendetegn paa Uligestorhed: „Det hele er større end en Del af det“. Der er kun Tale om en Tilstand og slet ikke om nogen Flytning, der skulde tilvejebringe denne Tilstand. Ogsaa dette Sammenligningsmidddel kan altsaa kun anvendes paa Figurer, der umiddelbart tilvejebringes ved de udtrykkelig foreskrevne og ene tilladelige Operationer.

Disse er de Konstruktioner, som udføres ved ret Linie og Cirkel med de Egenskaber, som tillægges dem i Definitioner og Postulater. Derimod maa man, som allerede bemærket, i k k e s i g e: Konstruktion ved Lineal og Passer. Til saadanne mekaniske Redskaber henvises ikke; men Postulaterne 1. og 2. kræver kun, at den ved to Punkter eller et Stykke af en ret Linie bestemte, ubegrænsede rette Linie existerer, Postulat 3., at den ved Centrum og et Punkt (en forelagt Radius med Endepunkt i Centrum) bestemte Cirkel existerer, og Postulat 5., at to rette Linier, der overskæres af en tredie saaledes, at Summen af de indre Vinkler paa dennes ene Side er mindre end to rette, har et til denne Side liggende Skæringspunkt. Om Postulat 4. skal vi siden tale. Til at bevise Existensen af Skæringspunkter bruger Euklid foruden Post. 5. endnu et Hjælpemiddel, nemlig den Omstændighed, at en Linie, der forbinder et Punkt indenfor en lukket Kontur med et udvendigt Punkt, maa skære Konturen. For ikke alene at bygges paa Anskuelsen kunde dette Hjælpemiddel fortjene at være nævnt blandt Postulaterne; indirekte peges dog derpaa i Definitionerne 13.: „Grænse er det, hvortil noget naar“, og 14.: „En Figur er det, som indesluttes af en eller flere Grænse(linie)r“; Existensen af et Skæringspunkt udtrykkes da ved Ordet „indesluttes“ [1]).

Vi skal nu se, hvorledes Euklid stræber at overvinde de Vanskeligheder, hvormed det er forbundet, alene ved de her angivne Hjælpemidler at undgaa at henvise til en rent mekanisk Flytning. Bestræbelsen herefter vil forklare de Spring mellem forskelligartede Sætninger, som hans Ordning af Stoffet frembyder, og som kan støde Læsere i Nutiden.

Den Hensigt at undgaa at gøre Brug af rent mekaniske Flytninger træder straks frem i Euklid's første Sætninger, som vi har berørt S. 39 (237), da vi talte om Menaichmos og hans Andel i den Begyndelse paa det euklidiske System, som nu skal beskæftige os. Efter i I,1. at have angivet Konstruktionen og derved bevist Existensen af en ligesidet Trekant med given Side, er Euklid i Stand til konstruktivt i I,2. at flytte et Liniestykke BC (Fig. 6) over til Stillingen AL med et givet Punkt A til Endepunkt. Det sker ved at konstruere den ligesidede Trekant [2]) ABD paa AB, dernæst ved Cirklen CG om B at føre BC over til BG i Forlængelsen af DB og ved Cirklen GL om D at føre BG over som AL. I Praxis vilde næppe nogen gaa den Omvej, men benytte Flytning af begge Passerens Ben, der tilmed er ligesaa skikket til Flytning over i en helt ny Plan. Netop ved at man ikke nøjes med dette mekaniske Middel, træder Sætningens rent theoretiske Formaal tydelig frem. Da man ifølge Postulat 3. ved en Cirkel kan føre et Liniestykke over paa en anden Linie gennem dens ene Endepunkt, sætter I,2. i Stand til at sammenligne to vilkaarlige Liniestykker i Planen med hinanden og viser, at naar de er givne, er deres Sum eller Differens (I,3.) det ogsaa.

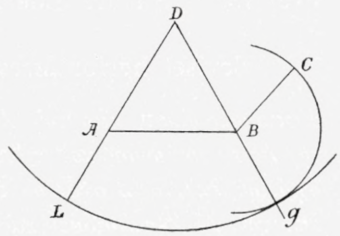

Fig. 6.

Videre synes man imidlertid ikke at kunne komme ad denne Vej, som Euklid tilsyneladende forlader allerede i Sætning 4., hvis man, som en Nutidslæser kunde være tilbøjelig til, opfatter den som ensgældende med: To Trekanter er kongruente eller kan bringes til Dækning, naar de har en Vinkel og de hosliggende Sider stykkevis ligestore. Til en saadan Udsigelse af Sætningen synes Beviset endog, som vi skal se, at give nogen Berettigelse; men Euklid har en god Grund til ikke i

---

[1]) Det er vildledende, naar Frøken Eibe her oversætter ὅρος, Grænse, her nærmest Grænselinie, ved Omkres og taler om flere Omkrese. En Figurs Omkres er efter Euklid kun én; men den kan bestaa af flere Grænser (Grænselinier). — Som T. A. Heath bemærker (Euklid's Elements I S. 235 ff.) er det Dedekind's Postulat, som Euklid stiltiende bruger.

[2]) *ABD* kunde lige saa gerne blot være en ligebenet Trekant, men for at sikre sig, at de til Konstruktionen af en saadan tjenende Cirkler skærer hinanden, skulde Euklid da forud have opstillet de Betingelser, som Siderne i en Trekant maa tilfredsstille. Af samme Grund er det, at han ved Halveringen af en Vinkel i 9. og af et Liniestykke i 10. og ved Oprejsning af en vinkelret i 11. bruger ligesidede Trekanter, hvis Existens han har sikret i 1. Da denne Forsigtighedsregel kun har theoretisk Betydning, er det ikke rimeligt, at man har anvendt den ved den forud kendte (S. 65 (263)) praktiske Udførelse af de tre sidstnævnte Konstruktioner.

selve Sætningen at tale om at bringe Trekanterne til Dækning, nemlig at han ikke i Beviset, men først senere kan give Anvisning paa den postulatbestemte Konstruktion, hvorved dette skal ske. Han siger derfor ikke i selve Sætningen noget, der kan minde om en Flytning, men udtaler, at naar (Fig. 7) to Trekanter (*ABC* og *DEZ*) har to Par Sider stykkevis lige store ($AB = DE$ og $AC = DZ$) og de mellemliggende Vinkler lige store ($BAC = EDZ$), saa vil de ogsaa have lige store Grundlinier ($BC = EZ$), og Trekanterne vil være lige store ($\triangle ABC = \triangle DEZ$), og de øvrige Vinkler, som ligger over for lige store Sider, vil være lige store ($ABC = DEZ$, $ACB = DZE$).

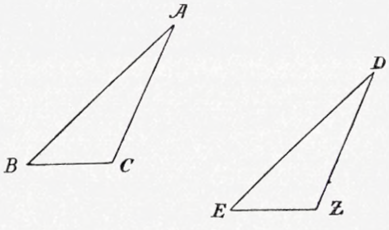

Fig. 7.

Beviset herfor føres saaledes:

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπί βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Thi naar Trekant *ABC* er anbragt paa Trekant *DEZ*, og Punktet *A* er lagt i *D* og den rette Linie *AB* paa *DE* (EUKLID I,2.), vil ogsaa Punktet *B* dække Punktet *E* paa Grund af Ligestorheden af *AB* og *DE*. Da nu *AB* dækker *DE*, vil ogsaa den rette Linie *AC* dække *DZ* paa Grund af Ligestorheden af Vinklen *BAC* med *EDZ*, saaledes at ogsaa Punktet *C* dækker Punktet *Z* paa Grund af Ligestorheden af *AC* med *DZ*. Men nu dækkede ogsaa *B E*; altsaa vil Grundlinien *BC* dække Grundlinien *EZ*; thi hvis, naar *B* dækker *E* og *C* dækker *Z*, Grundlinien *BC* ikke dækker *EZ*, vil to rette Linier omslutte et (Flade-)Rum, hvilket er umuligt; altsaa vil Grundlinien *BC* dække og være lig med Grundlinien *EZ*. Derfor vil ogsaa hele Trekanten *ABC* dække og være lige stor med hele Trekanten *DEZ*, og de øvrige Vinkler vil dække og være lige store med de øvrige Vinkler, nemlig *ABC* med *DEZ*, *ACB* med *DZE*.

For at faa nøjagtig at vide, hvad EUKLID vil udtrykke i dette Bevis, maa man overalt paa samme Maade oversætte det Ord *ἐφαρμόζειν*, som han gentager 12 Gange, og hvormed han peger tilbage paa den i Postulat 7. gjorte Brug af samme Ord. I Modsætning til HEIBERG og Frøken EIBE, der bruger forskellige Ord, hvoraf nogle direkte peger paa en mekanisk Flytning af en hel og uforandret Trekant, oversætter jeg overalt det intransitive ἐφαρμόζειν ἐπί ved „dække". I det første Participium i Medium ἐφαρμοζομένου maa Ordet derimod være taget i sin transitive Betydning, og denne Passiv har jeg oversat ved „er anbragt", hvorved da underforstaas „nemlig for at prøve om der er Dækning" [1]). Endog denne sidste Oversættelse vil ikke undlade at lede Tanken hen paa den Operation, hvorved Dækningen skulde opnaas, altsaa nærmest paa en Flytning. Det samme kan vel ogsaa siges om det græske Ord ἐφαρμόζειν i dettes transitive Betydning; men den gentagne Brug af dette Ord røber, at Euklid dermed har en udtrykkelig Hensigt, som i Betragtning af, at han ellers undgaar mekanisk Flytning, maa være den, foreløbig intet at sige om, hvorledes „Anbringelsen" tilvejebringes. Det er nemlig først senere, at han fuldstændig kan gennemføre den Konstruktion, som er det eneste Middel dertil, som han har betinget sig ved sine Postulater. Hvad der er bevist i Sætning 4., er, at denne Konstruktion, naar den engang lader sig iværksætte, og naar Beliggenheden af den „flyttede" Figur er valgt, nemlig for Punktet A i Punktet D og for AB udad DE, og hvor der maa være underforstaaet den Side af DE, hvor den „flyttede" Figur skal falde, at Konstruktionen da vil blive entydig. Dette følger af „Alm. Begr." 7. og 8.; navnlig 8. viser, at B da ikke kan falde inden- eller udenfor E, AC ikke inden- eller udenfor DZ o. s. v.; og det er dertil disse Axiomer bruges. Derimod synes Slutningsbemærkningerne om, at to rette Linier ikke kan indeslutte noget Fladerum, nogenlunde overflødig, idet Entydigheden af en ret Linies Bestemmelse ved to Punkter er underforstaaet i Postulat 1., saaledes som dets Anvendelser i Sætningerne 1. og 2. allerede viser. Efter en mundtlig Meddelelse af Heiberg stemmer dog denne Bemærkning ikke med Euklids sædvanlige Fremstillingsform og turde være indskudt ligesom det dermed ligelydende Postulat, som man har tilføjet efter Euklids Tid.

For at Sætning 4. kan faa sin fulde Anvendelse, kræves der altsaa en Angivelse af en Konstruktion af den Trekant med en given Vinkel og to hosliggende Sider i en ny Stilling, om hvilken det i 4. bevises, at den paa Beliggenheden nær da vil være entydig bestemt; Sætningen udtaler netop, at dens øvrige Stykker og Arealet da vil være bestemte. En Del af Konstruktionen er dog allerede angivet, nemlig Anbringelsen af en ret Linie af given Længde AB fra D udad DE, og dette

[1]) Naar jeg her tager Afstand fra en Oversættelse af Heiberg, maa jeg straks tilføje min hjertelige Tak til ham for Gennemsyn og Berigtigelse, ikke blot som anført i Note S. 13 (211) af de fra Heise laante, men ogsaa af mine andre Oversættelser. De ovenfor opstillede Fordringer til Oversættelsen tilfredsstilles af T. A. Heath (I S. 247—48), hvor det intransitive ἐφαρμόζειν ἐπί overalt gengives ved „coincide with", ἐφαρμοζομένου ved „if (the triangle) be applied to"; men da der hverken forud eller her er sagt, hvorledes denne Anbringelse skal have fundet Sted, gaar han ud fra, at der her nødvendigvis maa være tænkt paa en mekanisk Flytning. Han antager det dog S. 249 for muligt, at allerede Euklid var opmærksom paa de Indvendinger, som kan gøres derimod. Iøvrigt henvises til Meddelelser som Heath, saavel her som i Noterne S. 224 ff. til „Almindelige Begreber" 7. (der hos ham bliver til 4., da han kun medtager de utvivlsomt ægte Axiomer), giver om andre Behandlinger af de samme Vanskeligheder, som her møder Euklid.

er sproglig betegnet ved her ikke at bruge Ordet ἐφαρμόζειν, hvis Anvendelse ikke er hjemlet ved Postulater og tidligere Konstruktioner, men det samme Ord „lægge“ (τιθέναι), som i Sætning 2. er knyttet til Forlæggelsen af et Liniestykke til et Sted, hvor det faar et nyt givet Endepunkt, og hvorfra det ved en Cirkel kan drejes ind paa en given Linie. Dette er blevet muligt derved, at allerede Definition I, 15. paa en Cirkel indeholder en Forudsætning om Størrelse. I at fuldføre Konstruktionen mangler endnu en Konstruktion af en given Vinkel med et givet Toppunkt og Ben og liggende til en given Side af dette. Denne Konstruktion sættes Euklid dog først i Stand til at udføre ved Hjælp af senere Sætninger, der støtter sig paa selve den i 4. beviste Sætning.

Denne Ordning staar i Strid med den Fordring, som synes at maatte knytte sig til Menaichmos' Anvendelse af Problemer med deres Konstruktioner som Beviser for Existensen af de Figurer, man undersøger eller benytter. De maa antages at skulle gaa forud for Anvendelser af disse Figurer og for de Theoremer, der udtrykker deres Egenskaber. Saaledes gør Euklid ogsaa, naar han f. Ex. ved Konstruktion viser Existensen af et Liniestykkes Midtpunkt, før han benytter det. Og vi skal snart se historiske Beviser for, at man virkelig fastholdt denne Fordring. Dens logiske Berettigelse ses ogsaa i det her foreliggende Tilfælde, idet der først bevises, at 4. er rigtig, hvis man er i Stand til konstruktivt at udføre den i Beviset benyttede „Anbringelse“, og saa dog den dertil tjenende Konstruktion beror paa Sætninger, der bevises ved Hjælp af 4. Dette er en Cirkelslutning; men det er allerede noget, at denne logiske Cirkel af sig selv lukker sig. Derved er man sikret imod at indvikle sig i nogen Modsigelse ved i Beviset for 4. at forudsætte Muligheden af en „Anbringelse“ eller Flytning, og ved her at gaa ud fra denne blotte Mulighed at udlede den Fremgangsmaade, hvorved den skal virkeliggøres. Antagelsen af denne Mulighed er imidlertid en Forudsætning om, at „Rummet“ er saaledes beskaffent, at det tilsteder en saadan Flytning, at visse Størrelser „Flytningsinvarianter“: Afstande, Vinkler og Arealer bliver uforandrede, eller at, som vi nu siger, Rummet har et „konstant Krumningsmaal“. Forudsætningen er saaledes et virkeligt Postulat eller Axiom, som Euklid stiltiende antager. Hilbert undgaar i „*Grundlagen der Geometrie*“ en saadan abstrakt og almindelig Antagelse ved den mere konkrete at opstille selve Sætning I, 4. som Axiom, en Udvej, som allerede Peletarius havde vist hen paa i *In Euclidis elementa geometrica demonstrationum libri sex* (1557), S. 15. I 8., hvor den Sætning, at to Trekanter, der har Siderne stykkevis ligestore, ogsaa har de ensliggende Vinkler ligestore, bevises antithetisk ved at antage et Par saadanne Vinkler ulige store, anvendes Ordet ἐφαρμόζειν ganske paa samme Maade som i 4., og paa de tilsvarende Steder, for at omgaa en direkte mekanisk Flytning af den ene Trekant over paa den anden.

At vor Forklaring til I, 4. og 8. ganske stemmer med den Opfattelse, som gjorde sig gældende paa den Tid, da Begyndelsen af Euklid's Elementer blev til, fremgaar af en Kritik af I, 4. og af dette Theorems Plads, som netop maa skrive sig fra denne Tid. Den er bevaret ved Proklos (S. 241,18—243,20) efter en ældre

Meddelelse fra Karpos og kan vistnok føres tilbage til de tidligere (S. 37 (235)) omtalte Forhandlinger mellem Menaichmos og Speusippos om Problemer og Theoremer. Efter den heldige Begyndelse med Problemerne I, 1. og 2. maa det nødvendigvis være sat under Debat, hvorledes man skulde gaa videre og forud for Theoremet I, 4. faa opstillet et Problem, der fuldtud sikrede Existensen af de omhandlede Figurer. Hermed stemmer det, at Udtalelsen, hvoraf en stor Del dog kun foreligger i Proklos' refererende Gengivelse, begynder med i Almindelighed at fremhæve, at Problemer maa gaa først, da det er ved dem, man finder det, hvis Egenskaber undersøges i Theoremerne. Det følgende passer kun paa de i 4. og 8. indeholdte Theoremer. At der dog formelt gives Paastandene en større Rækkevidde, kan bero paa Proklos' Tilbøjelighed til en udvandende Almindeliggørelse af det, som han meddeler, men kan ogsaa hidrøre fra, at man paa den Tid, paa hvilken Kritiken først fremkom, ved Theoremer og Problemer mest tænkte paa dem, der skulde tages til Udgangspunkt for den hele Lære: naar man havde givet dem den rette Form, vilde den Skikkelse, hvori de øvrige skulde fremtræde, give sig selv. Naar der saaledes siges, at medens et Problem er klart og bestemt, er Udsigelsen af et Theorem besværlig og kræver en stor Nøjagtighed og forstandig Kritik for hverken at blive for omfattende eller snever med Hensyn til Sandheden (*τοῦ δὲ θεωρήματος* (*πρότασιν*) *ἐργώδη καὶ πολλῆς δεομένην ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς κρίσεως, ἵνα μήτε πλεονάζουσα φαίνηται μήτ' ἐλλείπουσα τῆς αληθείας*), saa passer dette kun paa 4. og 8., af hvilke det første udtrykkelig nævnes som Exempel. Den forlangte „forstandige Kritik" vil det dog ikke have været saa svært at udvise ved selve Udsigelsen (*πρότασις*) af Sætningen, hvorom der — dog kun efter Proklos' Referat — navnlig skulde være Tale; thi ved at gøre denne tilstrækkelig lang, har man kunnet undgaa at nævne nogen Flytning; men det er kun ved den yderst forsigtige Brug af Ordet *ἐφαρμόζειν*, at man ogsaa i Beviset har kunnet undgaa en direkte Henvisning til en mekanisk Flytning.

At det dog heller ikke derved helt er lykkedes at undgaa at hentyde til en anskuelig Flytning, siges i den direkte Omtale af Beviset for 4., som gives med Karpos' Ord:

Παντελῶς γὰρ ἐπὶ τούτου ταῖς κοιναῖς ἐννοίαις χρῆται καὶ τρόπον τινὰ τὸ αὐτὸ τρίγωνον ἐν διαφόροις λαμβάνει τόποις κείμενον· καὶ γὰρ ἡ ἐφαρμογὴ καὶ ἡ ἀπὸ ταύτης ἰσότης δεικνυμένη παντάπασιν ἔχεται τῆς αἰσθητῆς καὶ ἐναργοῦς ὑπολήψεως. ἀλλ' ὅμως καὶ τοιαύτης οὔσης τῆς τοῦ πρώτου θεωρήματος ἀποδείξεως εἰκότως προηγήσατο τὰ προβλήματα. διότι καθόλου τὴν προηγουμένην ἐκεῖνα τάξιν ἔλαχεν.

Dertil bruger han (Euklid) udelukkende de „almindelige Begreber" og tager paa en Maade den samme Trekant i forskellige Beliggenheder; thi ogsaa Dækningen og den derved viste Ligestorhed skyldes helt og holdent den sanselige og anskuelige Opfattelse. Men dog, skønt Beviset for dette første Theorem er et saadant, er Problemerne med Rette stillet foran. Altsaa har disse i Almindelighed faaet den første Plads.

Idet det fremhæves, at Beviset kun bruger de „almindelige Begreber“ (særlig 7. og 8.), mindes der om en Mangel af et ved Postulater løst Problem, som skulde skaffe Figuren tilveje. I Stedet herfor bruges „Betragtningen af den samme Trekant i forskellige Beliggenheder“, der jo maa bero paa en Flytning; og det er ikke for at rose den, at den siges at „skyldes en sanselig og anskuelig Opfattelse“, selv om den undskyldes lidt ved Ordene „paa en Maade“. Naar Karpos tilføjer, at Problemerne dog gaar forud, maatte dette sigte til Euklid's Sætninger 1.—3.; men disse er i Virkeligheden ikke tilstrækkelige til i 4. at udføre den Konstruktion af den flyttede Figur, som skulde erstatte Flytningen. Ved 1. og 2. flyttes vel Liniestykket AB; men den Konstruktion, hvorved Vinklen BAC skulde flyttes, kommer først senere (i 23.). Mon Kritiken ikke netop fra først af skulde have gjældt dette Punkt, og Karpos' afglattende Bemærkning tilsidst bero paa en Misforstaaelse af den oprindelige Kritik og være foranlediget ved, at der dog gaar nogle Problemer forud for dette første Theorem?

Hvorledes dette sidste Spørgsmaal end skal besvares, ses det, at det, man beklagede ved Beviset for 4. og ved 8., netop har været Brugen af en anskuelig Flytning i Stedet for en rationelt begrundet plangeometrisk Konstruktion, og det stemmer med, at Euklid overalt i det følgende for retlinede Figurers Vedkommende sætter en saadan Konstruktion i Stedet for anskuelige Flytninger. Han var sig altsaa Kravet om dette fuldt bevidst og maatte i det hele tage Hensyn til alle de Krav, som var blevet gjort gældende i de Forhandlinger om den rette Begyndelse paa en Fremstilling af Geometriens Elementer, der efter vore forskellige Uddrag af Proklos var blevne førte mellem Mathematikerne fra Menaichmos til Eukkid. Man kan derfor vide, at Euklid vel har overvejet baade den Plads, hvorpaa han har stillet hver Sætning i første Bog, og hvert Ord i Udsigelsen af og Beviset for disse Sætninger, særlig naar det gjaldt noget saa omstridt som Beviserne for 4. og 8. Derfor har vi ogsaa maattet og kunnet prøve selve Ordene i disse sidste Beviser.

Vi skal nu give et kort Overblik over, hvorledes Euklid bygger videre, foreløbig for at naa til den Konstruktion, der skal helt overvinde den i 4. og 8. kun delvis overvundne Vanskelighed ved Flytning af retlinede plane Figurer. I 5. anvender han det i 4. fundne Resultat til at bevise, at i ligebenede Trekanter Vinklerne ved Grundlinien er lige store. Ogsaa i dette Theorem maa han endnu, imod Menaichmos' Principer, forudsætte Existensen af ligebenede Trekanter, altsaa af Trekanter med givne Sider (som dog maa tilfredsstille visse givne Betingelser), førend han i et senere Problem beviser den. I 6. beviser han den omvendte Sætning. 5. benyttes i 7. til at bevise, at to Punkter A og B ikke kan være Toppunkter i to ligebenede Trekanter med en fælles Grundlinie, som helt ligger paa samme Side af den rette Linie AB. For denne Sætning har han Brug i det alt omtalte antithetiske Bevis for Sætning 8., at to Trekanter, der har Siderne ligestore, ogsaa har Vinklerne ligestore og altsaa ifølge 4. selv er det. Hverken her eller i det følgende sammenfatter han dette ved et om Flytning mindende Ord som vort „Kongruens“. Først efter senere at have talt om Ligedannethed, kan han sige „ligestor og ligedannet", hvor vi siger kongruent; herved er enhver Anvisning paa Flytning undgaaet.

Med 8. har EUKLID vundet et konstruktivt Kendetegn paa, hvad ligestore Vinkler er, nemlig i deres Optræden som ensliggende Vinkler i Trekanter med samme Sider. For i 23. at bruge det til den almindelige Konstruktion af en flyttet Vinkel, det er her, hvor al Tale om mekanisk Flytning undgaas, af en Vinkel ligestor med en given, med Toppunktet i et givet Punkt og en given Linie gennem dette til Ben, maa han dog først i 22. give den almindelige Konstruktion af en Trekant med givne Sider; men forud for dette maa han finde Mulighedsbetingelsen for dette Problem, der uden Tilføjelse af denne Betingelse som Diorisme slet ikke vilde være noget Existensbevis. Efter den Orden, som han og senere græske Mathematikere følger, skal det forud for Problemet i et Theorem (20.) bevises, at den opstillede Betingelse er nødvendig; dens Tilstrækkelighed bevises ved Konstruktionen.

Førend EUKLID naar saa vidt, nøjes han med at anvende det i 8. vundne Kendetegn paa mere specielle Tilfælde; men allerede i disse sætter det ham i Stand til at give Problemer og Theoremer den rette indbyrdes Ordning, hvad han jo nødtes til at forsømme i 4.—8. Han konstruerer saaledes i 9. og 10. en Vinkels Halveringslinie og et Liniestykkes Midtpunkt, før han tør forudsætte deres Existens og gøre Brug at dem i andre Sætninger. Og dette stemmer ganske med de almindelige Krav, som han stiller sig, og efter hvilke han ikke kan nøjes med Anskueligheden af, at der maa være en Halveringslinie og et Midtpunkt. Det gælder om, at de Vinkler, hvori den første deler den givne Vinkel, skal komme til at tilfredsstille det konstruktive Kendetegn paa Ligestorhed, som han endelig har kunnet opstille i 8., og ligesaa de Stykker, hvori Midtpunktet deler Liniestykket, Kendetegnene paa Ligestorhed mellem Liniestykker.

Kendetegnet 8. sætter ham i Stand til de „Problemer", hvorved det vises, at der virkelig er noget, som svarer til Definition 10.'s Bestemmelse af en ret Vinkel, det er en saadan, som er lig med dens Nabovinkel. Det sker ved de bekendte Konstruktioner af en ret Linie, som staar vinkelret paa en given i et givet Punkt af denne (11.) eller gaar gennem et givet Punkt udenfor den (12.)

Noget vidtløftige forekommer os maaske nu Beviserne i 13. og 14. for, at Vinklerne, som en ret Linie i et Punkt danner med en ret Linie paa samme Side af denne, tilsammen udgør to rette, og at, naar omvendt Summen af to eller flere paa hinanden følgende Sidevinkler er to rette, de yderste frie Ben ligger ud i en ret Linie. En mulig Grund til Vidtløftigheden, særlig af Beviset for 14., skal vi snart berøre. Til de nævnte Sætninger slutter sig Sætning 15. om Ligestorheden af Topvinkler.

Sætning 15. benyttes i den nu paafølgende, mere direkte Forberedelse af den Diorisme, som udtrykker Forudsætningen for, at tre opgivne Liniestykker kan være Sider i en Trekant. I 16. bevises, at Nabovinklen ACD til en Vinkel i en Trekant ABC (Fig. 8) er større end en hvilkensomhelst af Trekantens andre Vinkler, f. Ex. A. Det sker ved til Midtpunktet E af Linien AC, hvis Existens er bevist i 10., at drage Linien BE og paa dens Forlængelse afsætte $EZ = BE$. Da følger det af 4., at Vinkel $A = ACZ < ACD$. Samtidig medtages med Henblik paa den senere Paralleltheori den af 16. følgende Sætning 17., at Summen af to Vinkler i en Trekant er mindre end to rette. 16. benyttes dernæst til at bevise (18.), at overfor den største af to Sider i en Trekant ABC, hvor $AC > AB$ (Fig. 9), ligger den største Vinkel; thi afsættes $AD = AB$ paa AC, er ifølge 5. Vinkel ABD, som kun er en Del af Trekantsvinklen B, ligestor med ADB, som ifølge 16. er større end C. Den omvendte Sætning 19. udledes heraf ved et antithetisk Bevis.

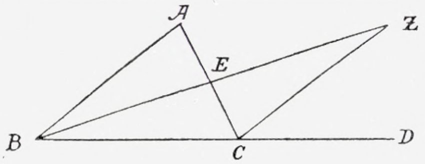

Fig. 8.

Til 19. knytter sig atter (i 20.) Beviset for, at (Fig. 10) en Side BC i en Trekant ABC er mindre end Summen af de to andre $BA + AC$; thi afsættes $AD = AC$ paa Forlængelsen af BA, er (ifølge 19.) $BD > BC$. Skønt Euklid dermed har naaet at bevise Nødvendigheden af Mulighedsbetingelserne for en Trekants Bestemmelse, ved sine tre Sider, føjer han dog dertil straks den almindeligere Sætning (21.), at naar af to Trekanter med en fælles Side den ene ligger indeni den anden, er Summen af den indvendige Trekants to andre Sider mindre end Summen af de to øvrige Sider i den udvendige Trekant. Af Hensyn til en senere Betragtning indskyder vi her den Bemærkning, at af de to Sætninger 20. og 21. følger umiddelbart de almindeligere, at, naar en ret og en brudt Linie har samme Endepunkter, er den første mindst, og at, naar af to brudte Linier mellem samme Endepunkter, der vender Konkaviteten til samme Side, den ene ligger indenfor den af den anden og den rette Linie mellem begges Endepunkter begrænsede Figur, er den inderste mindst.

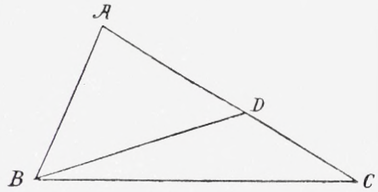

Fig. 9.

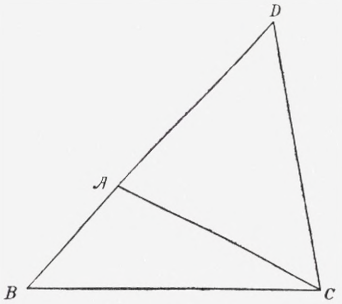

Fig. 10.

Sætning 20. sætter Euklid i Stand til at tilføje Mulighedsbetingelsen til Problemet 22. om en Trekants Bestemmelse ved sine tre Sider og efter dettes Løsning at konstruere en given Vinkel paa et nyt Sted (23.). Manglen fra 4. og 8. er altsaa nu udfyldt, og Flytningen af en Vinkel kan nu som tidligere Flytningen af et Liniestykke (2.) udføres ved en postulatbestemt Konstruktion. Da dette nu er vist en Gang for alle, kan derefter Euklid tænke sig en hvilkensomhelst retlinet Figur flyttet hen til et andet Sted i Planen, saaledes f. Ex. at en Side falder sammen med et givet dermed ligestort Liniestykke i Planen, uden at bygge paa en intuitiv Forestilling om en mekanisk Flytning. Derved sættes han i Stand til at fuldstændiggøre 4. og 8. med Sætningerne om Trekanter, der har to Sider stykkevis ligestore, men (24.) den mellemliggende Vinkel[1]) eller (25.) den tredie

[1]) I den bevarede Tekst er Beviset for 24. ufuldstændigt, idet Mulighederne ikke er udtømte med Hensyn til den tredie Vinkelspids i den flyttede Trekant; denne Mangel er dog tidlig bemærket og udfyldt.

Side ulige stor, og til i 26. under antithetisk Form at bevise, at en Trekant paa Beliggenheden nær er fuldstændig bestemt ved en Side og to Vinkler.

Nu gaar Euklid over til Læren om Paralleler og den dermed forbundne om Vinkelsummen i en Trekant, og derved benytter han som bekendt det berømte 5. Postulat, i ældre Udgaver betegnet som det 11. Axiom. Undersøgelsen af dette Postulats principielle Betydning skal vi dog her forbinde med en Undersøgelse af Betydningen af det mærkelige Postulat 4.: alle rette Vinkler er ligestore; thi det maa være før det Sted i Euklid's Elementer, hvortil vi nu er naaet, at der skulde kunne have været Brug derfor, og dog har vi i vor Gennemgang ikke fundet nogen Anledning til at omtale det. Tvertimod fremgaar det af Definitionen paa en ret Vinkel, at den er Halvdelen af en lige Vinkel, som vi nu kalder den, hvis Ben falder i hinandens Forlængelse, og at sige, at saadanne er ligestore, er det samme som at sige, at en ret Linies Forlængelse ud over et Punkt (Postulat 2.) er entydig bestemt. Euklid bruger ganske vist ikke Begrebet en lige Vinkel, som han i det hele ikke udstrækker sine Begreber til Grænsetilfælde (et Kvadrat er ikke et Rektangel osv.); men denne Vanskelighed vilde han ligesaa let her som andetsteds kunne omgaa ved Brug af et antithetisk Bevis eller lignende. Der synes altsaa ikke at have foreligget nogen Nødvendighed for at udtale den nævnte Paastand som Postulat, for i Sætning 14. deraf at slutte, at to Vinkelsummer, der begge er to rette, er indbyrdes ligestore. Det er jo netop dette, der umiddelbart følger af Entydigheden af Postulat 2. Ved at se hen paa, hvad der umiddelbart findes i Euklid's Beviser, har jeg derfor tidligere, nemlig i min Mathematikens Historie, ikke kunnet finde nogen anden Grund for Euklid til at opstille Postulat 4., som udtaler, at „alle rette Vinkler er indbyrdes ligestore“, end den, at han derved har villet pointere Entydigheden af Postulat 2.; men saa skulde han ligesaa vel have pointeret Entydigheden af Postulat 1. Begge Dele ses imidlertid af Anvendelserne overalt at have været underforstaaet.

Hvis man imidlertid vil betragte Opstillingen af Postulat 4. som en Uagtsomhed, turde den her givne Forklaring være den rimeligste og vistnok den eneste, som kan knyttes til virkelige Anvendelser hos Euklid af Postulatet. Ved at se hen til den Omhu, hvormed hvert Skridt i Begyndelsen af første Bog er overvejet og forhandlet af kyndige Mathematikere, hvis Opmærksomhed var saa meget mere aarvaagen, som det behandlede Omraade var lille, bliver man dog mindre tilbøjelig til at tro, at en saadan Uagtsomhed kunde begaas, og begaas uden at blive anholdt. I Virkeligheden var Fristelsen til at anholde den og bevise Postulatet større end den til at godkende dets Opstilling som Postulat. Der er derfor Grund til at undersøge, om ikke netop den Omstændighed, at Euklid har stræbt at undgaa Brug af Figurflytning, kan have bragt ham til at opstille et Postulat, hvorved hans mere rationelle Geometri, i hvilken det i og for sig ikke savnes, bliver reelt identisk med den hidtil kendte, den, som benytter Flytninger. Man opfordres saa meget mere til at prøve dette, som vi af Euklid's Behandling har set, hvor meget Besvær den Vanskelighed, som har bragt Hilbert til at opstille Euklid's Sætning 4. som Axiom, har voldt ogsaa ham. For at foretage denne Prøve maa vi undersøge „den Geometri“, som EUKLID vil faa ud, naar han alene bygger paa Postulaterne 1.—3. Derved skal vi foreløbig ganske se bort fra, om vore Betragtninger ogsaa kunde tillægges EUKLID og hans samtidige, og blot tænke paa, hvad en konsekvent Videreførelse af de Undersøgelser, som i Elementerne bygger paa de nævnte tre Postulater, vil give[1]).

Hvad der har voldt de Vanskeligheder, hvormed vi i det foregaaende har set EUKLID kæmpe, er, at Anvendelsen af Størrelsesbegrebet paa geometriske Størrelser, først og fremmest Længden af begrænsede rette Linier, sker ved de „almindelige Begreber“ 7. og 8., som først kan anvendes, naar Størrelserne helt eller delvis dækker hinanden, men at paa den anden Side denne Dækning ikke som en praktisk Maaling maa tilvejebringes ved en mekanisk Flytning, men ved Konstruktioner, byggede paa de tre første Postulater. Ved disse benyttes Cirkler. En saadan er ifølge Def. 15. „en plan Figur, indesluttet af én saadan Linie (som kaldes Periferien), at alle de rette Linier, der kan drages ud til den fra ét indenfor Figuren liggende Punkt, er indbyrdes ligestore“. Her lægger man først og fremmest Mærke til, at Cirkellinien, Periferien, bestemmes som Sted for Punkter med indbyrdes ligestore Afstande fra Centrum; men hvad „ligestore“ Afstande er, faar man først at vide i „Almindelige Begreber“ 7. Der er dog ingen Grund til at stødes over denne Orden; thi Brugen af EUKLID's Forudsætninger svarer her ligesaa lidt som andetsteds til den Orden, hvori de opstilles. Mangen en Definition forstaas først efter de senere Sætninger om, hvorledes det definerede tilvejebringes[2]). Derimod kunde man befrygte en „circulus vitiosus“, naar de ved Ligestorhed af Radierne definerede Cirkler benyttes i de Konstruktioner, som tilvejebringer den Flytning, hvorved Ligestorheden efter „Alm. Begr.“ 7. prøves.

At EUKLID's Forudsætninger dog ikke danner en saadan logisk Cirkel, kan ses deraf, at de virkelig, som vist i det foregaaende, har kunnet benyttes til en rationel Opførelse af en Helhed, hvori baade Cirkler og Ligestorhed af Liniestykker faar deres bestemte Betydninger. Dette sker ved en Samvirken af de to paa forskellige Steder opstillede Forudsætninger. Betragter man i Cirklens Definition Kravet om Radiernes Ligestorhed som gældende en endnu ikke nærmere forklaret Egenskab, hvorom kun vides, at den bestemmer Radiernes Endepunkter, er Cirklen foreløbig kun en lukket Kurve og Centret et saadant Punkt, at en Linie derigennem kun skærer Periferien i et Punkt paa hver Side af Centrum. At det siges, at Radierne er ligestore, og at man efter Postulat 3. med et hvilketsomhelst Punkt til

---

[1]) Den Forklaring af Postulat 4., som vi derved erholder som et paakrævet Supplement til de andre 4 Postulater, er given af LINDEMANN i „Vorlesungen über Geometrie“ II, 1 (1891) S. 540 ff. Denne gaar dog ikke ind paa den Maade, hvorpaa EUKLID i det enkelte benytter de Forudsætninger, som han opstiller; men han viser kun deres Sammenhæng med det, som karakteriserer projektivisk og metrisk Geometri.

[2]) Dette gælder f. Ex. i VII. Bog, i hvis Begyndelse vi har troet at se en Model for den senere synthetiske Ordning af andre Afsnit (se S. 24 (222)), om Definitionen paa „Dele af“ (se Oversigt 1910 S. 410). Det stemmer ogsaa med ARISTOTELES' *Analytica post.* I, 10 (se S. 43 (241)).

Centrum kan konstruere en Cirkel, som gaar igennem et hvilketsomhelst givet Punkt (det vil sige, at en saadan Cirkel existerer) giver dernæst et konstruktivt Kendetegn paa, om Liniestykker med et fælles Endepunkt er ligestore. Dette giver dernæst (ved EUKLID's Sætninger I, 1.—3.) Kendetegn paa, om Liniestykker, der ligger paa vilkaarlige Steder i Planen, er ligestore, eller hvilket der er størst. Hermed bliver der stillet nye Krav til det System af Kurver i en Plan, som man skal have Lov til at kalde Cirkler. De Liniestykker, som ved Konstruktioner med dem bestemmes som ligestore, skal nemlig ogsaa svare til det i de 6 første „Almindelige Begreber" opstillede Størrelsesbegreb, deriblandt særlig tilfredsstille det første Krav, at naar to Størrelser er ligestore med en og samme tredie er de indbyrdes ligestore. Naar man saaledes i Sætning 1. konstruerer den ligesidede Trekant ABC ved Cirkler om A og B som Centre og med Radius AB, der skærer hinanden i Punktet C, skal Cirklen med C som Centrum, der gaar gennem A, tillige gaa gennem B, altsaa være underkastet en Betingelse foruden de nysnævnte, og flere Betingelser vil komme til, naar C bliver betragtet som Vinkelspids i flere ligesidede Trekanter, eller naar man tillige tager Hensyn til Flytningssætningen 2.

Der synes nu at rejse sig det Spørgsmaal, om der overhovedet existerer et System af Kurver i Planen, der tilfredsstiller alle de Betingelser, som kræves af dem, som man efter de opstillede Forudsætninger vil kalde Cirkler. Dette Spørgsmaal kan imidlertid efter den Maade, hvorpaa PLATON's Efterfølgere dannede Postulaterne, straks besvares med Ja. Det er sket ved en Analyse, Opløsning af forud kendte Sætninger i deres Elementer, og de sidste Elementer, de, fra hvilke man gaar ud i den synthetiske Fremstilling, er de, der opstilles som Definitioner og Postulater. De forud bekendte Sætninger, som man gaar ud fra, er saadanne, som man let kunde bevise ved Figurflytning, og som altsaa, som vi nu vilde udtrykke os, gælder for „den Geometri", i hvilken Figurflytning er en tilladelig Operation, og som vi for Nemheds Skyld vil kalde den empiriske Geometri. Analysen skulde vel ifølge det Formaal, som man havde sat sig, helst naa til saadanne Forudsætninger, af hvilke man ogsaa uden Figurflytning kunde udlede de samme og nye Sætninger; men Sikkerheden for, at disse Forudsætninger ikke staar i indbyrdes Strid, altsaa overhovedet er mulige, følger af, at det efter deres Oprindelse paa Forhaand vides, at der existerer „en Geometri", for hvilken de gælder, nemlig den „empiriske Geometri". Et andet Spørgsmaal er det, om de samme Forudsætninger er tilstrækkelig snævre til at passe alene paa denne empiriske Geometri. At dette ikke er Tilfældet, skal her først vises ved Betragtninger, som ikke stod til de gamles Raadighed. Holder man sig udelukkende til Postulaterne, maa der endog spørges, om der ikke existerer en almindeligere Geometri, hvis rette Linier alene defineres ved Postulaterne 1. og 2. og et til 5. svarende, om end anderledes begrænset Skæringspostulat. Dette vilde finde Sted i den Geometri, som F. KLEIN efterlyser i sit Erlangerprogram [1]). Forudsætningen om, at de rette Linier,

[1]) *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Erlangen 1872. Se ogsaa: *Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie*, II (Math. Annalen VI (1873)).

hvilke man i EUKLIDS Elementer vil tillægge de ved de nævnte Postulater udtrykte geometriske Egenskaber, tillige skal være de empiriske, opstilles dog andetsteds, nemlig i Definition 4. paa en ret Linie. Naar denne siges at være en saadan Linie, hvis Punkter ligger ἐξ ἴσου, er dette uoversættelige Udtryk, der ligeledes bruges i Definitionen paa en Plan, vistnok, som P. TANNERY har begrundet[1]), et Laan fra den tekniske Prøve paa, om en Linie er ret, eller en Flade plan. Definitionen peger altsaa direkte hen paa den empiriske rette Linie. Naar den er traadt i Stedet for den, som PROKLOS (S. 108,6) tillægger PLATON: den Linie, hvis Midte og Ender dækker hinanden (nemlig naar man ser henad den), er det maaske, fordi denne kun fremhæver en enkelt af de Maader, hvorpaa man praktisk kan prøve, om en Linie er ret. De mangfoldige Forsøg, man har gjort paa at presse et geometrisk Indhold ind i EUKLID's Definition, turde derfor være ret betydningsløse, og hvad værre er, Navnet Definition, der senere har faaet en mere omfattende Betydning, end der kan tillægges mange af EUKLID's Definitioner, har bragt[2]) til at overse, at det, særlig for den rette Linies Vedkommende, er i Postulaterne, at man skal søge den egentlige geometriske Bestemmelse, nemlig Angivelsen af de rent geometriske Egenskaber, hvorpaa der i det følgende skal bygges. Dette ses deraf, at EUKLID intetsteds gør nogen direkte Brug af den nævnte Definition. Hvad han derimod opnaar ved denne, det er at faa tilkendegivet, at det er paa den empiriske rette Linie, at han vil have anvendt alt det, som han derefter udtrykker ved eller kan udlede af sine Postulater. Det er da kun disse, som han benytter i sit geometriske System, og Anvendeligheden af dette beror paa, at de empiriske Linier har de i Postulaterne angivne Egenskaber, hvad EUKLID forudsætter, eller, om man vil: det afhænger af, hvorvidt[3]) de har den. — Brugen af Linealen til at tegne og flytte rette Linier hænger sammen med dens i Definition 4. udtrykte empiriske Egenskaber; men, som alt bemærket, har dette Redskab ikke umiddelbart noget at gøre med den paa Postulaterne grundede Geometri.

Ved den alt anførte Definition paa Cirklen sigter EUKLID derimod ikke særlig til den empiriske Cirkel, men giver, som alt anført, ogsaa nogle af Oplysningerne om dens Brug i det geometriske System. Dette turde hænge sammen med, at han foreløbig i Bog I—II ikke har Undersøgelser af Cirklen selv for Øje, men derimod en Anvendelse som geometrisk Hjælpemiddel („Symbol“, se II. Kap.) ved Undersøgelse af retlinede Figurer og til at slaa Størrelsesbegrebets Anvendelse paa Liniestykker, Vinkler og Arealer fast; det er en Anvendelse af samme Art som den, der fra først af har foranlediget Indførelsen af Keglesnitslinier og af ARCHIMEDES' Spiral. De Cirkler, der anvendes i de nævnte to Bøger, har derfor, saalænge man nøjes med Postulaterne 1.—3., kun de Egenskaber, som fremgaar af Brugen af disse og af Definitionen, forsaavidt den forstaas i Overensstemmelse med det Begreb om

[1]) Revue des Études grecques, t. X (1897) p. 14. — Mémoires scientifiques, II p. 540.

[2]) F. Ex. ENRIQUES: Encyklopädie der math. Wissensch. III, 1.

[3]) Smlgn. HJELMSLEV: Lærebog i Geometri, eller: Vidensk. Selsk. Oversigt 1916, S. 181—189.

Størrelser af Liniestykker, altsaa ogsaa om Radiernes Ligestorhed, som, efter hvad vi viste, fremgaar deraf og af de „Almindelige Begreber“.

For at faa fat paa de Egenskaber, som maa tillægges de Linier, der i den saaledes almindeliggjorte Plangeometri i Overensstemmelse med de Forudsætninger, som virkelig benyttes, maa kaldes Cirkler, vil vi tænke os to Planer α og α' og i den ene α', „den empiriske Plan“, operere med empiriske rette Linier og empiriske Cirkler og Afstande og i den anden α vel, i Overensstemmelse med Definition 4. paa en ret Linie, med empiriske rette Linier, men med Cirkler og Længder af Liniestykker, som endnu ikke er underkastede de i Begyndelsen af Euklid's I. Bog ubenyttede Postulater 4. og 5. Vi kan lade fire Punkter A, B, C, D af α, af hvilke ikke tre ligger i en ret Linie, svare til fire Punkter af α', med hvilke det samme er Tilfældet. Naar nu til enhver ret Linie i den ene Plan ogsaa skal svare en ret Linie i den anden, faar vi en projektivisk Samsvaren mellem Punkterne i de to Figurer. Gaar man nu ud fra til hinanden svarende Punkter i de to Figurer og anvender tilsvarende lineære Operationer, kommer man i α og α' til nye tilsvarende Punkter. Ved Konstruktionen af tre Punkter L', M', N' i α', som ligger i en ret Linie, kan man ogsaa delvis benytte Cirkler, nemlig ved Anvendelse af Pascal's Sætning paa en Cirkel. De tre Punkter L, M, N, der svarer til L', M', N', ligger i en ret Linie, og til Siderne i den pascalske Sekskant svarer Linier, som danner en ny saadan, hvis Vinkelspidser ligger paa et Keglesnit, der svarer til Cirklen i α'. Da nu den i Ord udtrykte Anvendelse af de Kurver, som i de to Geometrier kaldes Cirkler, er ganske den samme, vil det fundne Keglesnit være en „Cirkel“ i den udvidede Geometri. Som svarende projektivisk til Cirklerne i Planen α' maa Samlingen af „Cirkler“ i α være Keglesnit gennem to faste reelle eller imaginære Punkter E og F svarende til Cirkelpunkterne i α', Linien EF altsaa til den uendelig fjerne Linie i α', og „Centrene“ for disse „Cirkler“ vil være Linien EF's Poler.

Naar nu Euklid, der jo ikke tænker paa at bygge en ny og almindeligere Geometri paa de geometriske Forudsætninger, han faktisk indskrænker sig til at benytte, vil have slaaet fast, at den virkelige Genstand for hans rationelle Tankebygning er den empiriske Geometri, kan det kun ske ved Tilføjelse af nye Postulater. De maa paa den Maade, han kunde det, udtrykke, at Punkterne E og F er de uendelig fjerne Cirkelpunkter.

Hertil hører først og fremmest, at Linien EF er den uendelig fjerne Linie i Planen, eller at det, som han kalder parallele Linier, netop er de empiriske Paralleler. Tildels er dette allerede udtrykt i Def. 23 paa parallele Linier som saadanne Linier i samme Plan, der kan forlænges i det uendelige til begge Sider uden at skære hinanden; men i det væsentlige vilde man opnaa det samme ved en Begrænsning, som under en eller anden Form udtrykte, at Operationerne ikke udstrækkes til den Del af Planen, hvor den Linie, vi har kaldt EF, ligger. Hvis man uden at ane den fulde Rækkevidde af de beskrevne Operationer, der ved Brug af de omtalte Keglesnit i Stedet for Cirkler i Virkeligheden bliver projektiviske, fik med Skæringspunkter med denne Linie at gøre, vilde disse Operationer føre til Resultater, der vilde forekomme Euklid ganske absurde: Linestykker, hvis konstruerede Midtpunkt ligger i det ene Endepunkt eller paa Forlængelsen, Vinkler mellem rette Linier, som skærer hinanden, der ifølge Konstruktionen bliver 0 eller negative (ɔ: optræder som Subtrahender i Stedet for Addender og omvendt). Saadanne Absurditeter undgaar Euklid dels ved faktisk at holde sig til en Figuranskuelse, der bunder i en empirisk Opfattelse af Plangeometrien, dels ved den nysnævnte Definition paa Paralleler. Derved bliver han i Stand til at bevise den ene Parallelsætning (I, 27), nemlig at to Linier bliver parallele, naar de overskæres af en tredie, saaledes at de ensliggende Vinkler er ligestore. I modsat Fald vilde man nemlig faa en Trekant, hvor en udvendig Vinkel var ligestor med den indvendig modsatte, medens det i 16. er bevist, at den er større. Det Tilfælde, hvor denne Forudsætning vilde blive ugyldig ved en konsekvent Gennemførelse af de beskrevne Konstruktioner, udelukkes nemlig ved den i Definitionen paa parallele Linier udtrykte Forudsætning.

At dette kan opnaas gennem en negativt udtrykt Definition, beror paa, at Beviset for 27. føres antithetisk. Derimod maa der en positiv Forudsætning til for at begrunde denne Sætnings Modsætning, at der virkelig existerer et Skæringspunkt mellem to rette Linier, naar de overskæres saaledes af en tredie, at de ensliggende Vinkler ikke er ligestore. Og her er det Euklid's (eller hans nærmeste Forgængeres) store Fortjeneste at have set, at en saadan Forudsætning ikke er en Følge af dem, han alt har opstillet, men at en ny er nødvendig. Da har han valgt at opstille den nævnte Paastand selv som Postulat. Den omtalte Nødvendighed er dog allerede den logiske Følge af hans hele Behandling. Konstruktioner ved Hjælp af rette Linier beror nemlig lige saa meget paa, at man kan bestemme et Punkt ved to rette Linier, som paa, at man kan bestemme en ret Linie ved to Punkter, og det er kun undtagelsesvis, at Euklid i en foregaaende Sætning (21.) har kunnet paavise Existens af Skæringspunkter mellem rette Linier derved, at en Linie, der forbinder et indre Punkt af en Fladefigur med et ydre, maa skære Konturen (S. 68 (266)).

Hermed har man den Euklidiske Paralleltheori, som i Tidernes Løb har fristet saa mange til at forsøge at bevise den Paastand, som den mere klartseende Euklid har fundet det nødvendigt at gøre til et Postulat. Om dettes Tilbliven fremgaar det af nogle af de af Heiberg (S. 18) anførte mathematiske Steder hos Aristoteles (65 a 4, 66 a 11, 74 a 13), at man da var begyndt at faa Blik for de Vanskeligheder, denne Theori kan frembyde, men ikke endnu havde overvundet dem. Som Kendetegn paa Parallelismen brugte man vel ogsaa da Ligestorheden af et Par ensliggende Vinkler fremkomne ved Overskæring med en tredie Linie; men man synes hverken at have bevist Tilstrækkeligheden, som det sker ved Euklid I, 16., eller at have set, at Nødvendigheden maatte slaas fast ved et Postulat. Man var dog bleven sig bevidst, at her forelaa et Savn. Parallelspørgsmaalet er altsaa allerede sat under Debat paa samme Tid som de øvrige Spørgsmaal, som ligger til Grund for Behandlingen af Begyndelsen af første Bog. Menaichmos har da rimeligvis ogsaa haft det for Øje ved sine Forslag til Behandlingen af denne Begyndelse.

Ved Definitionen paa Paralleler og ved den Forbindelse, hvori denne sættes med det i alle Tilfælde uundværlige Konstruktionsmiddel, som gives i Postulatet I, 5., har EUKLID faaet slaaet fast, at i den Geometri, hvorpaa han anvender sine iøvrigt viderérækkende Postulater 1.—3., er den Linie, vi i vor Prøvelse af disses Rækkevidde har kaldt EF, uendelig fjern. Den Brug af Anskuelsen, som han heller ikke nægter sig, vil ogsaa medføre, at de for alle „Cirklerne“ i hans Figurplan α fælles to Punkter E og F er imaginære, eller at de paagældende Kurver er ligedannede og ligedan beliggende Ellipser; men videre kan man ikke komme, naar man udelader Postulat 4. og ikke tillægger Ligestorhed og Uligestorhed af Liniestykker og af Vinkler eller „Cirkler“ anden Betydning end den, som det lykkedes at fastslaa uden mekanisk anskuelig Figurflytning. Hvert Ord af EUKLID's første Bog bliver, naar Postulat 4. udelades, ogsaa anvendeligt paa en Plangeometri med saadanne Ellipser i Stedet for Cirkler, en Plangeometri, hvis Sætninger kunde udledes af den sædvanlige empiriske Plangeometris ved Parallelprojektion fra en Plan til en anden. Der behøves altsaa endnu et Postulat eller en Definition, svarende til Definitionen 4. paa en ret Linie, til at indskrænke den paa de øvrige udtrykkelig opstillede Forudsætninger byggede Geometri til at omfatte empiriske Cirkler, som man (med Tilnærmelse) kan tegne med Passer, og i hvilken Ligestorhed af Liniestykker eller Vinkler er den, som kan prøves ved mekanisk Flytning. Hertil vil det være nok at slaa fast, at en af hans „Cirkler“ er en empirisk Cirkel, og dermed de alle, eller at to af hans „rette Vinkler“, hvis Ben ikke er stykkevis parallele, er virkelige empiriske rette Vinkler, det er saadanne, som mekanisk kan bringes til Dækning med deres Nabovinkler.

Dette sidste Krav opfylder EUKLID (ganske vist paa en Maade, der siger mere end det strengt nødvendige), naar han i sit Postulat 4. siger, at alle rette Vinkler er ligestore, forudsat, at han dermed mener, enten at han om de Vinkler, der ifølge hans Sætninger og Konstruktioner og rationelle Beviser har frembudt sig som rette, vil forudsætte, at de ogsaa ved mekanisk Flytning kan bringes til Dækning, eller omvendt, at de Vinkler, der ad mekanisk Vej kan konstateres at være ligestore med deres Nabovinkler, altsaa rette, ogsaa er ligestore efter de Kendetegn paa Ligestorhed, som Bogens rationelle Fremstilling fører til. Tages Prøven derimod i Postulatets Subjekt og Prædikat fra den samme af disse to geometriske Opfattelser, saa er Paastanden ikke noget Postulat, men en Sætning, der er let at bevise. Opfattet derimod, som jeg her først har gjort det, opfylder Postulat 4. netop det nysnævnte Krav. Medens vi her har fundet dette ved at tale om den „almindeligere Geometri“, som man vilde have, naar dette Postulat mangler, har EUKLID og hans Forgængere sikkert kun tænkt paa at opføre en Geometri, der fra Indholdets Side skulde falde sammen med den empiriske. Det er dennes første Elementer, han har villet udtrykke i sine Definitioner og Postulater, og med stor Skarpsindighed, forbunden med Forsigtighed, har han paa Grundlag af disse opført sine Sætninger uden i sine Beviser at gøre noget Laan fra en Forudsætning om Flytning; han har jo ikke engang uden Bevis villet forudsætte noget saa anskueligt som Existensen af et Liniestykkes Midtpunkt eller en Vinkels Halveringslinie. Det vilde ikke være utænkeligt, at man under et saa omhyggelig udført Arbejde paa en eller anden Maade var bleven opmærksom paa, at de saaledes dannede Sætninger har en større Rækkevidde end den, der gælder for den empiriske Geometri. Allerede paa MENAICHMOS' Tid kendte man vistnok saa meget til Ellipser som Snit i Cylindre, at man kunde faa Blik for den Udvidelse til Brug af ligedannede og ligedan beliggende Ellipser i Stedet for Cirkler, som overtydede os om Behandlingsmaadens større Rækkevidde; men en saadan Betragtning har ganske vist ikke efterladt Spor blandt de faa Beretninger, som vi har om det store Forarbejde paa Elementerne, der er gjort i Tiden fra MENAICHMOS til EUKLID. Under de dertil knyttede Forhandlinger kan der dog nok have været Lejlighed til Tvivl om, hvorvidt det saglige Indhold af den Lærebygning, som man var ifærd med at opføre med saa stor Kunst, ganske dækkede den empiriske Geometri, hvis Sætninger man i tidligere Tider havde godtgjort ved rigelig Brug af mekanisk Figurflytning. At Grundene til en saadan Tvivl vilde bortfalde ved at opstille, eller maaske ved at beholde Postulat 4., som der, hvad vi straks skal se, kan have været andre Grunde til at opstille, har det ikke været svært at overbevise sig om.

Er Sagen gaaet saaledes til, kunde man dog maaske ogsaa hos EUKLID savne en Paavisning af, at Postulat 4. nu ogsaa er tilstrækkeligt til at indskrænke Omraadet til i Virkeligheden kun at omfatte den empiriske Flytningsgeometri. En saadan Paavisning var dog ikke at vente i EUKLID's Elementer. Som gældende Forbindelsen med mekaniske Flytninger maatte den i nogen Maade knyttes til disse; men dem er det netop, han har villet holde uden for sin Lærebygning. Det er ham nok, ved Definition 4. og Postulat 4. at have opnaaet, at Lærebygningens Resultater netop gælder den sædvanlige Geometri, hvis Størrelser maales ved Flytninger; men disse skal ikke udgøre en Del af selve Lærebygningen. I denne gøres derfor heller ingen Brug hverken af Definition 4. eller af Postulat 4.; de nævnes blot forud som en begrænsende Angivelse af det Omraade, for hvilket Lærebygningen *skal* gælde.

Hermed har vi set, baade at EUKLID's Postulat 4. indtager en logisk vel grundet Plads, og at der foreligger logiske Grunde til, at der dog i Bogen ikke forekommer direkte Anvendelser deraf. Vil man saa dog fastholde, at det skyldes en tilfældig Fejltagelse eller Misforstaaelse, maaske den, jeg tidligere har prøvet at give som Forklaring og berørt S. 77 (275), saa er dets Medtagen dog et Tilfælde, der ligner en Tanke. Naar EUKLID netop har sagt, hvad der efter hans Formaal burde siges, har man saa Lov at tvivle om, at han og de, der før ham saa omhyggelig har drøftet disse Spørgsmaal, ogsaa selv har tænkt de Tanker, der kommer frem i Bogen? — om de end ikke har givet dem den Skikkelse, i hvilken jeg har forsøgt at tænke dem efter. — Dette Spørgsmaal lader sig i alt Fald ikke helt afvise.

Det kan dog have nogen Interesse at prøve, om ikke Postulatet kan have spillet en noget anden Rolle før EUKLID og særlig i den Drøftelse, som gik forud for den endelige Skikkelse, som han gav Elementerne. Skønt det i disse kun optræder som en Baggrund, der — hvad enten det nu tilsigtedes eller ikke — sikrede den euklidiske Geometris Tilknytning til den empiriske Geometri, kan dets Forekomst og den Skikkelse, det har, maaske pege tilbage paa en tidligere mere direkte Anvendelse.

I den Henseende skal vi bemærke, at Definition 4. paa en ret Linie giver Anvisning paa at anvende en Lineal til materielt at tilvejebringe de i Postulaterne 1. og 2. krævede rette Linier gennem to Punkter eller som Forlængelse af en given. Sætning 2. har paa den anden Side vist, at man endnu har betragtet Passeren som et saadant mekanisk Instrument, paa hvis Anvendelse til at bestemme ligestore Liniestykker man ikke turde bygge en rationel Geometri. Anbringelsen af Postulat 4. iblandt Postulaterne peger hen paa, at man har tænkt sig dette anvendt til Konstruktioner. Det udtales netop, at enhver ret Vinkel kan tilvejebringes som Kopi af en en Gang for alle tilvejebragt Norm, det er ved en Gnomon (S. 65 (263)). Har denne ved Siden af Linealen været det Redskab, som jævnlig anvendtes af Pythogoreerne ved deres theoretiske Undersøgelser, saa kan man endog foreløbig have givet den et Fortrin for den frie Brug af det da mere moderne tekniske Instrument, Tegnepasseren.

Har nu dette været Tilfældet, saa har Brugen af Gnomon kunnet hjælpe ud over de Vanskeligheder, som Indledningen til Geometrien foraarsagede. Det har da ikke været umuligt, at man, som det S. 38 (236) anførte Uddrag af PROKLOS kunde tyde paa, har forsøgt at stille Tilvejebringelsen af et Kvadrat ved en Konstruktion i Spidsen for Lærebygningen ved Siden af Konstruktionen af en ligesidet Trekant. Ganske vist kunde man da ikke straks bevise, at i den i et saadant Problem konstruerede Figur alle Vinkler var rette, alle Sider ligestore; det maatte i Overensstemmelse med den siden MENAICHMOS forlangte Rækkefølge forbeholdes senere Theoremer. Til hurtigere at naa dette vilde det bidrage, at Sætning 4., naar Brugen af Gnomon hævdedes i et Postulat, ikke mere vilde volde Vanskelighed, naar de to Trekanters ligestore Vinkel var ret, og let føre til den Konstruktion af en flyttet Vinkel, som foreløbig savnes i EUKLID's Bevis for den almindelige Sætning 4. Hvorledes man i det enkelte bar sig ad, maatte bero paa, hvorledes den i Postulat 4. antagne Flytning af en ret Vinkel blev anvendt til Konstruktionen af et Kvadrat, hvad der kunde ske paa flere Maader.

Har nu virkelig MENAICHMOS gjort en saadan Brug af Postulat 4., saa skylder man EUKLID, der ganske undlader at bruge Postulat 4. i sine Konstruktioner, et stort systematisk Fremskridt, nemlig Reduktion af alle de i hans rationelle System forekommende Konstruktioner til saadanne, der alene bygges paa de øvrige Postulater og praktisk vilde udføres ved Lineal og Passer. Dette Fremskridt vilde opveje den Afvigelse fra den gode Ordning af Problemer og Theoremer, som Citatet af KARPOS har vist os, at man paatalte i Oldtiden. EUKLID har dog været forsigtig nok til at lade Postulat 4. blive staaende. Hertil har der, som vi har set, været god Grund, hvis han ikke uden videre har villet have den ved Passeren teknisk erholdte Ligestorhed af Radierne i en dermed tegnet Cirkel godkendt som gyldigt theoretisk Grundlag for sine Undersøgelser. Ligesaa godt som at admittere den til Brug af Gnomon knyttede theoretiske Forudsætning kunde han imidlertid have admitteret Passeren og altsaa slaaet fast, at de i hans Theori indgaaende Cirkler er empiriske Cirkler — ikke blot ligedannede og ligedan beliggende Ellipser. Da vilde Postulat 4. blive ganske overflødigt. Da nu EUKLID netop har indført den konsekvente Brug af Cirkler, som han naturligvis i Virkeligheden tegnede med Passer, kan det ikke have varet længe, inden det 4. Postulat virkelig blev overflødigt og kun blev staaende af Respekt for Mesteren. Under denne Forudsætning bliver rigtignok ogsaa I, Sætning 2. overflødig.

Vi behøver ikke at følge EUKLID længere for at se, at han fra nu af for retlinede Figurers Vedkommende er naaet ud over de Vanskeligheder, det har voldt ham at ombytte den i „Almindelige Begreber" umiddelbart forudsatte Figurflytning med Konstruktioner, byggede paa udtalte Postulater, selv om Maaden, hvorpaa det er sket, har voldt enkelte theoretiske Betænkeligheder. For Figurer, hvori ogsaa Cirkler og Cirkelbuer indgaar, sker det dels direkte paa samme Maade, dels ved Grænseovergang. Det første er Tilfældet i III. Bog, hvor man i Sætning 24. paany møder den samme forsigtige Brug af Ordet ἐφαρμόζειν som i I, 4. og 8., det sidste i XII. Bog, hvor Overgangen sikres ved EUDOXOS' Postulat.

Kap. IX.

Ligedannede Figurer og Proportioner.

Den samme Forandring, som den geometriske Opfattelse og den geometriske Behandling af kongruente Figurer undergik ved Overgangen fra en delvis intuitiv Geometri til en gennemført rationel Geometri, er ogsaa Opfattelsen og Behandlingen af ligedannede Figurer undergaaet. Oprindelig havde man en ganske almindelig Forestilling om, at der existerer Figurer ligedannede med saa almindelige Figurer, som man i det hele var i Stand til at opfatte; i den rationelle Behandling har man derimod undersøgt Ligedannetheden af de allersimpleste Figurdele for først derefter at danne Begrebet om almindelig Ligedannethed ved ensartet Sammensætning af saadanne ligedannede Dele.

Oprindeligheden af Forestillingen om almindelig Ligedannethed viser sig af de ældste Afbildninger. En plan Afbildning af en plan Figur vil man altid have stræbt at gøre ligedannet med denne, naar der ikke har været Anledning til at gøre dem kongruente, og til forskellige plane Afbildninger af den samme Rumfigur set fra samme Side vil man have stillet den Fordring, at de skal være indbyrdes ligedannede. Grønlandsforskeren KNUD RASMUSSEN, hvem jeg udspurgte om en ældre Meddelelse af PEARY, har været saa god at vise mig nogle Tegninger af Kystlinier, som var udførte af Grønlændere, hvem han havde givet de dem uvante Redskaber Papir og Blyant i Haanden. Kystlinierne strakte sig over adskillige Dagsrejser, der var det Maal, som Grønlænderne angav, og Bugtningerne var udførte meget detailleret og med en Omhu, der vidnede om den gode Hukommelse, hvori de bevarede den synsoplevede Linie. At det var Linier, de kunde afbilde, strider ikke imod, at de oprindelige Synsoplevelser gælder Fladefigurer; thi Erindringen af Linien har sikkert været knyttet til Erindringen om det Terræn, der laa indenfor Linien, Fjeld, Dal o. s. v. Hr. Knud Rasmussen bemærkede, at den Evne, som Grønlænderne herved lagde for Dagen, ikke var ny og indført af Europæerne. Ved det første europæiske Besøg i Angmagsalik forefandt Holm saaledes en Art Landkort, der maatte udføres i det Materiale, man havde, og var udskaarne i Træ (Drivtømmer). Det var Reliefkort, i hvilke forskellige Øer var afbildede, forbundne ved en fast Stok. I disse var dog rimeligvis Højdemaalestokken forholdsvis stor, som den let bliver, naar den bestemmes ved et Skøn. Her skal vi dog holde os til plane Afbildninger af plane Figurer. Prøver paa saadanne har man ogsaa i de ved Rubin's Forsøg (S. 51 (249)) gjorte Afbildninger; thi der synes i alt Fald ikke at være lagt Vægt paa, at Maalestokken skulde være den samme som paa Forbilledet.

Paa alle disse Maader fremtræder det som en ret oprindelig Evne, gennem Synsoplevelse at opfatte vilkaarlige Figurers Ligedannethed, som bestaar i, at de som Figurer betragtet, altsaa bortset fra fysiske Forskelle, Farve eller Fremstilling ved ensfarvede Flader eller blot ved Konturtegning, er ganske ens undtagen i Henseende til Maalestok og Beliggenhed. Ligesom Forestillingen om Kongruens har man besiddet denne almindelige Forestilling, før man har tænkt paa at udtrykke den i Ord. Man er bleven sig de Egenskaber, der karakteriserer ligedannede Figurer, mere og mere bevidst, efterhaanden som det, saaledes for de ægyptiske Landmaalere, kom mere og mere an paa at tegne Figurerne nøjagtigere og at gøre den tilsigtede Anvendelse af dem. Der vil aldrig være faldet nogen andet ind, end at rette Linier skal gengives ved rette Linier. Man vil have gengivet et bestemt Maal i Marken ved et bestemt Maal paa Kortet og derved have set, at Længder, der fremstilles ved hele Antal af disse Maal, staar i samme Forhold paa de to Figurer, og snart ogsaa, at det samme gælder om Dele af Fladefigurerne, der indeholdes hele Antal Gange i disse. Derefter blev man, idet man sagtens begyndte med simple Multipla eller Submultipla, snart saa fortrolig med denne Proportionalitet af ensliggende Linier, at der skulde mere Skarpsindighed til at tvivle om dens Almengyldighed end til at antage den for sikret uden alt Bevis. Længe før det opdagedes, at to Liniestykker ikke behøver at være kommensurable, havde man altsaa faktisk i ligedannede Figurer et Middel til at operere med Forhold mellem geometrisk fremstillede Størrelser uafhængig af, om de er kommensurable. At der til et Kvadrat i den ene Figur vil svare et Kvadrat i den anden, vil man have betragtet som indlysende, og Landmaalernes Opgave at se, hvor mange Kvadrater paa Længdeenheden der indeholdes i et vist Areal paa Marken, vil man have løst ved de tilsvarende Operationer paa Kortet og derved have bemærket, at ligedannede Arealer forholder sig som Kvadraterne paa ensliggende Liniestykker. Dette ligger allerede i, at de ligedannede Figurer skal være ens i alt paa Maalestokken nær.

At i Ægypten ogsaa andre end Landmaalere har baaret sig væsentlig saaledes ad, ses af en ægyptisk Afbildning af, hvorledes en Tegning er overført i større Maalestok paa en Væg. Det er gjort ved at dele begge Billedplaner ved to Systemer af Paralleler i ensliggende Kvadrater og stykkevis overføre Billedet fra et Kvadrat i den ene Plan til det tilsvarende i den anden. Et Skøn, der snart bliver til Vished, om Proportionalitet dels af Længder dels af Arealer vil let have knyttet sig til en saadan Fremstilling, der iøvrigt ogsaa er en Brug af retvinklede Koordinater.

At to Cirkler maa være ligedannede, vil man tidlig have betragtet som indlysende. At man dertil tillige har knyttet den Forvisning, at der er et konstant Forhold mellem en Cirkels Periferi og dens Diameter eller dens og det omskrevne Kvadrats Areal, ses af de ældgamle, mere eller mindre heldige Forsøg paa at finde disse Forhold. Man træffer saadanne Forsøg baade hos Ægyptere og Indere. At de fortsattes hos Grækerne, ses af dem, som Antiphon og Bryson gjorde, og som senere anførtes som Modsætninger til den da fordrede exakte Behandling (se Oversigt 1913, S. 457).

At to Rektangler, hvis Sider staar i samme simple Talforhold, er ligedannede, ligeledes de Trekanter, hvori saadanne Rektangler deles ved Diagonalerne, derom kan der ikke have været nogen Tvivl. Efter min Opfattelse af Āpastambas Çulbasūtra[1]) har allerede denne forstaaet at anvende Sætningen om ligedannede Figurers Arealer samt den pythagoreiske Sætning til at multiplicere et saadant Rektangel med 3 uden at forandre Formen. Da man sikkert tidlig har haft særlig let ved at faa fat paa Ligedannethed af Figurer i ligedan Beliggenhed og bemærket Parallelismen af disses Sider, kan man heller ikke have næret nogen Tvivl om, at en Trekant er ligedannet med den, som afskæres ved en Paralleltransversal. Dette benyttes f. Ex., naar man har dannet Gnomonfigurer i videre Forstand som Differens mellem to ligedannede Figurer, hvoraf et Par paa hinanden følgende Sider falder paa hverandre.

Man forstaar saaledes, at Pythagoreerne kunde være vel rustede til et kombineret Studium af Proportioner og de ligedannede Figurer, hvorpaa de fremtræder. Denne Forbindelse træder tydelig frem i den gamle Benævnelse ligedannede plane Tal, hvilke forholder sig som to Kvadrater. Vi har ogsaa berørt (S. 61 (259)), at det pythagoreiske Bevis for den pythagoreiske Læresætning rimeligvis har været knyttet til Brug af ligedannede Figurer. Den anskuelige Maade, hvorpaa saadanne Figurer lader Proportioner træde frem, har ganske vist i de paa disse Figurer byggede Begrundelser draget Opmærksomheden bort fra den Mangel paa Exakthed, hvorpaa Zenon pegede hen, og som først Eudoxos afhjalp (se Oversigt 1915 S. 336 Noten); men netop derved beholdt man sin Frihed til at gøre en frugtbringende Brug af Intuitionen. Om Enkeltheder i de saaledes foretagne Under-

[1]) Se S. 843 i den anførte Afhandling fra V. Congrés de Philosophie. Genève.

søgelser[1]) ved vi dog kun lidt, fordi de derved vundne Resultater i Euklid's V. Bog fremtræder i den almindeligere Skikkelse, som Eudoxos gav Proportionslæren, og som i Tilslutning dertil Euklid i VI. Bog har givet Læren om ligedannede Figurer. Det nytter heller ikke at vise hen til Euklid's VII.—IX. Bog, i hvilke man, da Talen her kun er om Forhold mellem hele Tal, har troet at finde den Form, som man før Eudoxos' Tid har givet Proportionslæren. Indskrænkningen til hele Tal hidrører nemlig ikke fra Hensynet til den Simplifikation i Beviserne for Proportionssætninger, som disse tillader, men fra Hensynet til den Anvendelse, som her skal gøres til at føre exakte Beviser for Theaitet's i Euklid X, 9. opstillede Kriterier for Rationalitet eller Irrationalitet af Rodstørrelser, og som forklarer den Plads, disse arithmetiske Bøger har faaet i Geometrien (Oversigt 1910). Disse Bøger er i ligesaa høj Grad prægede af og for Begyndere vanskeliggjorte ved Theaitet's forsigtige Skarpsindighed som V. Bog af Eudoxos' geniale almindelige Synspunkt. Derimod vil mange af de i alle de her omhandlede Bøger (V—IX) indeholdte enkelte Sætninger have været kendte før de nævnte nærmeste Forløbere for den platonisk-euklidiske Omdannelse til en rationel Lærebygning, men da begrundede med mindre Omsigt og Forsigtighed og i mindre Almindelighed.

Fra den pythagoreiske Tid kender vi dog et vigtigt Hjælpemiddel, som dels opstod under Behandlingen af ligedannede Figurer, dels gjorde stor Nytte ved disses videre Undersøgelse, nemlig Vinkelbegrebet; men dets Opstaaen og Udvikling vil vi helst omtale for sig i et særligt Kapitel (X.), til hvilket vi derfor nu indskrænker os til at henvise.

Med hvor stor Sikkerhed og Klarhed en højt begavet Mathematiker kunde behandle ligedannede Figurer, derunder ogsaa de med disse forbundne Vinkler, paa en Tid, da hverken Eudoxos endnu havde behandlet Proportioner fra sit almindelige Synspunkt, eller Platonikernes Analyse havde opløst den almindelige Ligedannethed i Sætninger om Ligedannethed af de simpleste retlinede Figurer, ser vi af det opbevarede Fragment af Hippokrates fra Chios (Oversigt 1913, S. 442—456). Naar han udenvidere antager, at Cirkler forholder sig som Kvadraterne af deres Diametre, altsaa som de omskrevne Kvadrater, gør han kun det samme som de mange, der før ham har søgt at bestemme Værdien af dette Forhold. Idet to Cirkler er ligedannede, maa man ogsaa af dem ved Korder kunne afskære ligedannede Afsnit, og ifølge ligedannede Figurers almindelige Egenskaber maa dels disse staa i samme Forhold til de hele Cirkler, dels de deri indskrevne Vinkler være ligestore. Dette er, hvad Hippokrates opstiller som Udgangspunkt for sin Afhandling, og det gaar ikke ud over det, som enhver, der har en almindelig Forestilling om ligedannede Figurer, vil tillægge disse uden at have nogen Tvivl om sin Paastands Rigtighed. Man behøver derfor ikke at antage, at Hippokrates skulde have været i Besiddelse

[1]) At man ogsaa ad denne geometriske Vej kan komme til en exakt Proportionslære, har Mollerup vist i Mathematische Annalen 56 (1902); først dens Forbindelse med den arithmetiske Proportionslære kræver en Anvendelse af Eudoxos' Postulat.

af saadanne Beviser for disse Paastande, som vilde have tilfredsstillet de Krav, man stillede i Perioden fra Platon til Euklid, ja i Betragtning af det Arbejde, som det har voldt at opføre en geometrisk Lærebygning, hvori disse Krav er opfyldte, er det endog kun lidet sandsynligt, saa meget mere som Gennemførelsen af et saadant Bevis for de ligedannede Afsnits Proportionalitet med Cirklerne maatte blive meget vidtløftigt og gaa om ad ligedannede Udsnit. Saadanne omtaler end ikke Euklid, og hans Omtale af Cirkeludsnit indskrænker sig til en Definition, medens han udførligere behandler Cirkelafsnit.

Medens den almindelige Forestilling om ligedannede Figurer og deres almindelige Egenskaber endnu dannede Udgangspunktet for saa indgaaende Undersøgelser som Hippokrates', maatte den euklidiske Behandling omvendt gaa ud fra de „Elementer“, hvori man efter de platoniske analytiske Principer opløste denne almindelige Viden. Vinkler, derunder deres alt berørte Anvendelse til Bestemmelse af Paralleler, samt Forhold, deres Ligestorhed og Uligestorhed, Proportioner, deres Omdannelser og Kombinationer, maatte først studeres; først derefter kunde man benytte dem til Definitioner paa ligedannede Figurer og til nu ved Konstruktion at sikre sig det, man tidligere gik ud fra som selvfølgeligt, nemlig, at der existerer saadanne Figurer som de definerede. Disse Existensbeviser og de dermed forbundne Betingelser for Ligedannethed maatte man begynde med Anvendelsen paa Trekanter for derefter at hæve sig til ligedannede retlinede Figurer i Almindelighed, om hvilke der i VI. Definition 1. siges, at det er saadanne, der har Vinklerne stykkevis ligestore og de i Forhold til disse ensliggende Sider proportionale. Det almindelige Existensbevis føres i VI, 18. ved Løsning af følgende Opgave: Paa en given ret Linie (det er: et givet begrænset Liniestykke) at tegne en retlinet Figur, som er ligedannet med en given retlinet Figur, og i hvilken Liniestykket er ensliggende med en given Side i den givne Figur[1]). Efter at Existensen af Figurer, svarende til hans Definition paa Ligedannethed, saaledes er bevist, kan Euklid dernæst bevise de øvrige Egenskaber, som man efter den almindelige Forestilling ogsaa vil tillægge saadanne, nemlig, at Forhold og Vinkler mellem ensliggende Diagonaler og Sider ogsaa er ligestore, og, idet han begynder med Trekanter (VI, 19.), at Figurerne selv forholder sig som ensliggende Siders Kvadrater (VI, 20.).

Da Euklid's Definition paa Ligedannethed kun gælder retlinede Figurer, har han ingen Anledning til at sige, at to Cirkler altid er ligedannede; men han beviser i XI, 2., at de forholder sig som Kvadraterne paa Diametrene, ved at betragte dem som Grænser for ligedannede indskrevne Polygoner; Grænseovergangen sker i den af Eudoxos angivne Form. Derimod giver han allerede paa et tidligere Sted, nemlig i III. Bog, følgende Definition 11. paa ligedannede Cirkelafsnit: at det er saadanne, der rummer ligestore Vinkler, eller, tilføjer han, i hvilke Vinklerne er ligestore.

[1]) De sidste Ord skal udtrykke, hvad Euklid kalder *ὁμοίως κείμενον*. Det er vildledende, naar Frøken Eibe oversætter disse Ord ved „ligedan beliggende“, da herved efter den vedtagne danske mathematiske Sprogbrug betegnes noget andet, som slet ikke vilde passe her; der siges nemlig intet om, at de opgivne til hinanden svarende Liniestykker skal være parallele.

Denne sidste Definition siger dog ikke meget, idet han ikke opgiver noget andet Maal paa Afsnittets Vinkler, hvormed menes de, der dannes af Korden og Buen; de maa nemlig, som vi skal se senere, ikke, som vi nu gør, identificeres med Vinklerne mellem Korden og Tangenterne i dens Endepunkter. Tilføjelsen er derfor snarere en Paastand om, at ogsaa disse blandetlinede Vinkler er ligestore paa de to ligedannede Afsnit. Benævnelsen ligedannede bruges dog om Afsnit kun i III, 23. og III, 24., som tilsammen gaar ud paa, at ligedannede Afsnit paa samme Korde eller paa ligestore Korder er kongruente. Allerede disse Sætninger viser, at fraset Beliggenheden de Afsnit, som kaldes ligedannede, er ens paa Maalestokken nær, og kan altsaa, uden at der dog siges noget derom, i nogen Maade forklare Berettigelsen af at bruge samme Benævnelse „ligedannet" i III. Bog om Afsnit og i VI. Bog om Polygoner. Overensstemmelsen mellem de to Anvendelser af samme Ord træder endnu tydeligere frem ved den, som finder Sted mellem de i III, 33. og i VI, 18. løste Opgaver, idet begge Steder den ligedannede Figur bestemmes ved, at et givet Liniestykke skal være ensliggende med et bestemt Liniestykke i den givne, nemlig Afsnittets Korde i III, 33. og en Side i Polygonen i VI, 18. I den første af disse Sætninger nævnes vel Ordet ligedannet ikke, men af Definitionen III, 11. fremgaar det, at Talen er om Konstruktion af saadanne, der for forskelligt Valg af Korden bliver ligedannede, idet der paa et givet Liniestykke forlanges konstrueret et Cirkelafsnit, som rummer en Vinkel lig med en given. I III, 34. bestemmes dernæst den Korde, der af en given Cirkel afskærer et Afsnit, der — efter Definition III, 11. — bliver ligedannet med et givet. Dette kunde nærmest tjene til Existensbevis for de af Hippokrates betragtede ligedannede Cirkelafsnit; men at disse er proportionale med Cirklerne naar heller ikke Euklid at bevise, hvad han sikkert vilde være i Stand til at gøre i XII. Bog; men han har betragtet det som en Enkeltopgave, der ikke henhører til, og som vilde være for vidtløftig at tage med i „Elementerne". Dette havde han dog næppe forsømt, hvis, som flere har antaget, allerede Hippokrates havde ført et formelt Bevis derfor i sine Elementer.

Idet Euklid ikke har kunnet udtale en almindelig Definition paa Ligedannethed, der ogsaa omfatter alle krumlinede Figurer, og af hvilken han dernæst maatte kunne udlede alle de Egenskaber, som er fælles for ligedannede Figurer, har han maattet behandle de forskellige Arter hver for sig, navnlig retlinede Figurer i VI. Bog og Cirkelafsnit i III. Bog, men Afgørelsen af, hvilke han i ethvert Tilfælde vilde kalde ligedannede, maatte bero paa den samme almindelige, men ubeskrevne Forestilling, hvorpaa Hippokrates byggede, og det er i Henhold til denne, at ogsaa Læseren billiger hans Valg af denne fælles Benævnelse. Det har sin Interesse at undersøge, om Euklid i andre Skrifter eller hans Efterfølgere i den Henseende er naaet videre. Af hvad Archimedes i sit Skrift om Konoider og Sfæroider siger om ligedannede Ellipser og i Indledningen til dette Skrift om ligedannede Konoider og Sfæroider kan man se, hvorledes man paa hans Tid definerede ligedannede Keglesnit[1]);

[1]) Se XVII. Afsnit af min Keglesnitslære i Oldtiden. Det er mig en vis Tilfredsstillelse her at kunne konstatere den fulde Overensstemmelse mellem de Betragtninger, jeg den Gang knyttede alene til

de samme Definitioner har formodentlig Euklid givet i sine Keglesnitselementer. Om Parabler kunde der som om Cirkler kun siges, at alle Parabler er ligedannede; da der altsaa ikke bliver Brug for nogen Definition, er dette nærmest en Sætning, hvis Rigtighed beror paa den udefinerede almindelige Forestilling, hvorpaa man fra gammel Tid havde bygget, og denne Forestilling ligger ogsaa til Grund for, at man kalder Ellipser ligedannede, naar der er samme Forhold mellem Axerne, Hyperbler, naar de ligger i ligestore Asymptotevinkler. Først Apollonios har opstillet en for alle Keglesnit fælles Definition. Den knytter sig til Ligningen $y^2 = px \pm \frac{p}{a} x^2$ (hvor a er en Axe, p den dertil hørende Parameter) og gaar i Realiteten ud paa, at to Keglesnit henførte hver til sit Par retvinklede Koordinataxer, er ligedannede, naar deres Punkter (x, y) og (x_1, y_1) svarer saaledes til hinanden, at bestandig Forholdene $x : x_1$ og $y : y_1$ har samme konstante Værdi. Om denne Betingelse, der omfatter de af Archimedes for hvert enkelt af de tre Keglesnit anførte, ser man af Fortalen, at den skyldes Apollonios selv. Den kan aabenbart anvendes paa hvilkesomhelst Kurver, ja hvilkesomhelst Figurer, forsaavidt man under en eller anden Form har forstaaet at henføre dem til et Par retvinklede Koordinatsystemer. Midlet er altsaa fundet til at definere Ligedannethed i Almindelighed, selv om Apollonios kun anvendte det paa Keglesnit. Først herved er Ligedannethed bleven et almindeligt Begreb, hvis Anvendelse paa de enkelte Arter Figurer ikke mere behøver at bygges paa en uforklaret Forestilling. — Apollonios' Definition ved Koordinater er jo iøvrigt den, som Ægypterne faktisk anvendte i Praxis.

Kap. X.

Vinkelbegrebets Opstaaen.

Medens vi ellers har fundet og endnu i XIII. Kapitel vil finde en smuk og fuldstændig Overensstemmelse mellem den ældste Geometri, vi kender, og Udbyttet af Dr. Rubin's Undersøgelser over Synsoplevelse af plane Figurer, giver disse ikke nogen tilfredsstillende Forklaring af, hvorledes Vinkelbegrebet er opstaaet eller kan opstaa eller fremkaldes hos den, der endnu ikke besidder det. De Spørgsmaal, som paa dette Punkt stilledes Forsøgspersonerne, var ikke egnede til at fremkalde den mest nærliggende Forklaring; paa et vigtigt Punkt beroede de endog paa en mathematisk Misforstaaelse; de utilfredsstillende Besvarelser kan derfor nærmest tages

---

den græske Mathematik hos og efter Euklid, og dem, som jeg senere og uafhængig deraf har anvendt for at forklare det omstridte Sted hos Hippokrates.

til Indtægt for at forklare Sagen paa anden Maade end den, som Spørgsmaalene peger hen paa [1]).

Med Rette lægger Dr. RUBIN (S. 102 ff.) Vægt paa ogsaa for Vinklers Vedkommende at begynde med Synsoplevelse af Fladefiguren, altsaa her med at opfatte en Vinkel mellem to Sider af Begrænsningen som en „Tak" (Fladevinkel) af Fladefiguren; men denne Opfattelse lader sig næppe fastholde under den kvantitative Bestemmelse, som Forfatteren straks indlader sig paa; denne leder øjeblikkelig Opmærksomheden hen paa Vinklen som Middel til at bestemme de to Siders indbyrdes Stilling. Her som i de Tilfælde, vi tidligere har betragtet, vil den nøjere geometriske Prøvelse bringe til ogsaa at beskæftige sig med og sanseopleve Omridset; hvad er nemlig Takkens Størrelse betragtet i og for sig? Baade fra et mathematisk og et historisk Standpunkt maa jeg dog særlig tage Afstand fra den Maade, hvorpaa en ret Vinkel (Tak) gøres til Genstand for en kvantitativ Bestemmelse, nemlig som en enkelt blandt de Størrelser, som en kontinuert varierende Vinkel kan antage. Den skal efter RUBIN opfattes som Overgangsværdien mellem spidse og stumpe Vinkler; men disse Begreber forklares kun ved Henvisning til Tydeligheden af, om en Vinkel er meget spids eller meget stump. Ved Overgangen maa der imidlertid nøjagtigere Forklaringer til af, om en Vinkel er spids, ret eller stump, og da haves ikke nogen anden Forklaring end den, som mere eller mindre direkte gaar ud paa, at den er det, eftersom den er mindre, lig eller større end sin Nabovinkel. Holder man sig alene til Overgangsformen, er den rette Vinkel, saaledes som ogsaa Mathematikerne definerer den, en Vinkel, der er ligestor med sin Nabovinkel. Og dette er ikke nogen kvantitativ Sammenligning med andre Vinkler; thi om Vinklen er ligestor med sin Nabovinkel, kan man enten prøve ved at lægge den ene paa den anden, som naar man danner rette Vinkler ved at sammenfolde et Stykke Papir, begrænset af en ret Linie, saaledes at de to Dele af denne Linie kommer til at dække hinanden, eller det maa opfattes gennem en Synsoplevelse af, om Vinklen og dens — tegnede

---

[1]) Formaalet med denne Kritik af et Sted i Dr. RUBIN's interessante Bog er naturligvis at bringe den størst mulige Klarhed i Forhandlingen om Spørgsmaal, hvor Samarbejdet mellem experimentale Psykologer og Dyrkere af Mathematikens Forhistorie vil være af stor Betydning for begge Parter. For mit Vedkommende modtager jeg naturligvis ogsaa gerne saadanne Berigtigelser af min Opfattelse, som der maatte være Anledning til fra psykologisk Side, og som angaar Synsmaader, der kan antages at have ligget dem nærmest, der først gav sig af med mathematiske Spørgsmaal.

Ved denne Lejlighed skal jeg ogsaa nævne et andet Sted i RUBIN's Arbejde (S. 119 ff.), som man fra mathematisk Side vil finde svagt. Den deri omtalte Uklarhed i Forsøgspersoners Besvarelse angaaende det, der kaldes „Jævnbredde" af en Stribe, beror vistnok udelukkende paa en Sammenblanding af Begreberne „ens Bredde i en bestemt Retning" og „ens Bredde vinkelret paa Stribens Retning". I første Tilfælde skal den ene Rand være dannet ved Parallelforskydning af den anden, i sidste Tilfælde skal Randene være Mathematikernes parallele Kurver, hvis til hinanden svarende Punkter har samme Normal (og altsaa parallele Tangenter). Nu forstaar jeg nok, at det kan have psykologisk Interesse, om der er Tilbøjelighed til denne Sammenblanding i en ganske ureflekteret Synsoplevelse; men paa den anden Side maa den, der spørges, faa at vide, hvilken af to ganske forskellige Ting han spørges om. Jeg antager dog, at selv den Forsøgsperson, der er for uskolet til at opfatte denne Forskel, vil anerkende en Stribe, hvis Rande er parallele Kurver, som „jævnbred".

eller forestillede — Nabovinkel ligger symmetrisk med Hensyn til deres fælles Ben. Den, der allerede kender én ret Vinkel, kan fremdeles ved Sammenligning med denne erkende, om en anden er det. Ved Sammenligning med en saadan kan han ligeledes afgøre, om en anden Vinkel er spids eller stump, men ikke omvendt[1]).

Her er ikke nogen anden Forskel mellem den mathematisk skolede og den ikke skolede, end at den første gør sig Rede for, at han bruger disse Hjælpemidler, den anden bruger dem, uden at han gør sig Rede derfor; thi selve Kendskabet til rette Vinkler maa idetmindste i vore Dage, da man ser Husvægge, Vinduer og Ruder, Møbler med fremtrædende Rektangler, Bøger o. s. v., være udbredt til alle. Maaske vil RUBIN's „uskolede" Forsøgspersoner have ladet sig forvirre ved Henvisningen til spidse og stumpe Vinkler; men hans anden Forklaring, at den ene Linie „skal gaa lige ind paa den anden"[2]), vil ialt Fald have peget paa, hvad der spurgtes om. Den større eller mindre Nøjagtighed hvormed man afgør, om en Vinkel, set i en Stilling, hvor den nævnte direkte Prøve vanskeliggøres, er ret eller ej, vil da næppe bero paa geometrisk Skoling, men paa den større eller mindre Lejlighed, som man i sin Bestilling har til at se paa rette Vinkler i forskellige Stillinger; en, der plejer at dele Ler i Mursten, vil gøre det bedre end en Geometer af Profession.

Det var netop en Afgørelse i en saadan ugunstig Stilling, som RUBIN forlangte

---

[1]) Dette bemærker ogsaa ARISTOTELES 1035 b 6 (citeret efter HEATH I S. 181).

[2]) Ogsaa hvad dette vil sige, vil vel egentlig først den forstaa, der alt har Forestilling om en ret Vinkel. Der kunde dog maaske være tænkt paa, at den forlangte Linie skal være „den korteste Vej" fra et af dens Punkter til den givne; men denne Oplysning giver ikke noget godt synligt Kendetegn, idet en nærliggende Skraalinies Afvigelse fra den vinkelrette bliver stor i Sammenligning med Forskellen mellem de to Vejes Længder. Samme Mangel frembyder Bestemmelsen af en ret Linie som „den korteste Vej mellem to Punkter".

Bedre end RUBIN's er den indirekte Forklaring af Betydningen af en ret Vinkel, som Forskolelærerinder faar Anvisning paa at give Børn. En Firkant med to vandrette og to lodrette lige store Sider, kaldes et Kvadrat. Den deri indirekte indeholdte Forklaring paa en ret Vinkel som Vinklen mellem en vandret og lodret Linie staar vel i nogen Forbindelse ogsaa med Sanseoplevelser, der skyldes Tyngden; men det, der kommer til at karakterisere den rette Vinkel, er, at der paa den vandrette Linie ikke gøres Forskel mellem højre og venstre; og at saaledes den lodrette Linie har samme Stilling mod den vandrette Linies to Retninger, altsaa det, som man, naar Vinkelbegrebet bliver indført, vil, men ogsaa først da kan, udtrykke ved at sige, at Linierne danner ligestore Nabovinkler. Saaledes er Begrebet om en ret Vinkel som en Kvalitet opstaaet. At det er knyttet til en bestemt Stilling af Linierne, giver ingen Indskrænkning, naar man samtidig fastholder den ved Sanseoplevelser vundne Erkendelse om Figurers Flytning uden at forandres. At den intuitive Forestilling om rette Vinkler mellem rette Linier virkelig er opstaaet, og den Dag i Dag naturlig opstaar, paa denne Maade, udtrykkes ved, at man i min Barndom bestandig sagde „en Linie er lodret paa en anden", hvor Mathematikerne nu for at fremhæve Uafhængigheden af Beliggenheden siger „vinkelret". Ligeledes siger Franskmændene endnu *„perpendiculaire à"*, Tyskerne *„senkrecht auf"*.

At man i Forskolen taler om Kvadrater i Stedet for om indbyrdes vinkelrette Linier, hidrører fra, at Forestillingen om Flader gaar forud for Forestillingen om Linier. At der da tales om Kvadrater og ikke om Rektangler, komplicerer i Virkeligheden Sagen, da Opfattelsen af, at Siderne er ligestore, ikke er knyttet til samme Stilling af Figuren som Opfattelsen af, at Vinklerne er rette; men det sker for ikke at indføre for mange Figurer i Barnets Forestilling. — Den oprindelige Optræden af Rektangler og Kvadrater i den allerældste Geometri turde knytte sig til den samme naturlige Opstaaen af Forestillinger, som Forskolen kommer imøde hos Børnene.

af sine Forsøgspersoner. Man skulde betragte en foranderlig ligebenet Trekant fra den Side, hvor Grundlinien laa, og saa angive det Øjeblik, da Vinklen blev ret. Idet Vinklen fremtraadte som Vinkel i en ensfarvet Trekant, havde man ingen Lejlighed til at se dens Nabovinkel. Stillingen gav heller ikke Anledning til at forestille sig en saadan i en med den givnes ganske ensartet Stilling, saaledes som man kunde hvis man saa fra et Punkt over det ene Ben, medens det andet indtog Grundliniens Plads (eller det ene var lodret, det andet vandret). Prøven kan altsaa kun have været en Prøve paa Evnen til at genkende en ret Vinkel i en ugunstig Stilling, og en saadan Prøve af Hukommelse eller Rutine kan vel have sin Interesse, men har intet at gøre med Spørgsmaalet om, hvorledes Forestillingen om rette Vinkler er opstaaet uden nogen kvantitativ Sammenligning med andre Vinkler.

Denne Forestilling er sikkert langt ældre end Çulbasūtraerne og har været knyttet til Bygningshaandværker og andre Haandværker; men vi skal her begynde med dets Optræden i Çulbasūtraerne. Den er, som alt berørt S. 59 (257), Note, knyttet til Symmetriforestillingen: en Linie er vinkelret paa en anden, naar dens symmetriske Linie i Forhold til denne er dens egen Forlængelse; men særlig fremtræder den gennem Synsoplevelse af Firkanter, hvis 4 „Takker“ er ganske ens, altsaa Rektangler; ser man end ikke her umiddelbart Vinklernes Nabovinkler, erstattes de af de to nærmeste Vinkler i Firkanten. Her optræder den rette Vinkel ikke som et Kvantum, der sammenlignes med Vinkler af andre Størrelser, men dette Begreb er en Kvalitetsbestemmelse. Naar vi dog her bruger Benævnelsen „ret Vinkel“, er det kun en for Læserne forstaaelig Angivelse af, hvad der tales om.

Optræden og Sammenligning af andre Vinkler end rette er noget langt yngre, som er fremkommet, da man fik Brug derfor. Dette er vistnok først indtraadt hos de babyloniske Astronomer. Forskellen mellem to Punkters Beliggenhed paa Himmelkuglen angives ved den mellemliggende Storcirkelbue eller ved Vinklen mellem Synslinierne dertil, som jo kan angives ved Serør, der peger paa Stjernerne. At bestemme Liniers Stilling mod hinanden ved deres Vinkel, der maales ved de Cirkelbuer, for hvilke de er Centervinkler, blev særlig bekvemt, naar man betragtede Punkter, der med jævn Hastighed bevæger sig paa Storcirkler saaledes som det sker med Stjerner i Ækvator under Himlens daglige Omløb. Det er til denne Bestemmelse af Vinkler og de Cirkelbuer, hvorpaa de maales, at Inddelingen i 360 Grader, hver paa 60 Minuter, hvert paa 60 Sekunder, er indført. Hertil knyttedes imidlertid ikke stort andre geometriske Betragtninger end de, der vedkommer Proportionaliteten af Centervinkler og de Cirkelbuer, hvorpaa de staar. Først da denne Maaling af Cirkelbuerne og Vinklerne forbandt sig med den græske Geometri, hvis Vinkelbestemmelse hidtil nærmest var knyttet til Vinklers Optræden i retlinede Figurer, opstod Trigonometrien; men dette skete først i den alexandrinske Tid, altsaa efter den Omdannelse af Geometrien, hvormed vi beskæftiger os i dette Arbejde.

Det interesserer os derfor mere at se, hvorledes Vinkelbegrebet uafhængig heraf opstod i den mere af Ægypterne paavirkede græske Geometri. Vi har allerede S. 64 (262) set, hvorledes Ægypterne ogsaa i deres Astronomi kunde undgaa at bestemme Liniers Stilling mod hinanden ved Vinkler maalte paa Cirkelbuer, hvortil de var Centervinkler. Det skete ved Hjælp af Gnomon, altsaa ved direkte Afmaaling uden nogen Vinkels Mellemkomst af den Størrelse, vi nu kalder Vinklens Kotangens (eller Tangens til den anden spidse Vinkel i samme retvinklede Trekant). Derved var begyndt en Brug af ligedannede, foreløbig retvinklede Trekanter, og denne Brug af ligedannede retlinede Figurer gik over til Grækerne og udvikledes videre hos dem. At Dannelsen af det almindelige Vinkelbegreb har knyttet sig til Studiet af ligedannede Figurer, fremgaar af en som archaisk betegnet Benævnelse af ligestore Vinkler, nemlig „ligedannede Vinkler“ (*γωνίαι ὁμοίαι*, se PROKLOS S. 251,1 og flere Steder hos ARISTOTELES). Dette er fra først af en Kvalitetsbestemmelse; men det kan dernæst ikke have varet længe, inden man ogsaa sammenlignede ulige store Vinkler, trak dem fra hinanden, lagde dem sammen og i det hele behandlede dem kvantitativt.

Hvor tidlig denne Betragtning af Vinklerne begyndte hos Grækerne, lader sig næppe afgøre. Af de mest gennem EUDEMOS bevarede Meddelelser om THALES kunde det synes, som om allerede denne første hellenske Mathematiker skulde have kendt og betjent sig af Vinkelbegrebet. Af disse Meddelelser skal vi nævne dem, der tillægger THALES Kendskab til følgende rent geometriske Sætninger:

1. En Cirkel halveres af en Diameter (PROKLOS S. 157,12).
2. Vinklerne ved Grundlinien i en ligebenet Trekant er „ligedannede“ (PROKLOS S. 250,24).
3. Topvinkler er ligestore (PROKLOS S. 299,4).
4. THALES indskrev først en retvinklet Trekant i en Halvcirkel (DIOGENES LAERTIUS I, 24).
5. To Trekanter er kongruente, naar de har en Side og to hosliggende Vinkler ligestore (PROKLOS S. 352,15).

Desuden tillægges der ham nogle praktiske Bestemmelser som af en Pyramides Højde ved dens Skyggelængde og af et Skibs Afstand fra Kysten. At EUDEMOS har tillagt THALES Kendskab til Sætning 5. kommer, som han selv siger, deraf, at THALES maatte bruge den ved den sidstnævnte Bestemmelse. Der er altsaa ikke Tale om, at THALES skulde have opstillet eller bevist et Theorem med en saadan Ordlyd; nej, han har kun lagt Evne for Dagen til praktisk at bruge den ret selvfølgelige Ting, som dette Theorem udtrykker. At EUDEMOS tillægger THALES Kendskab til de andre anførte Sætninger kan, som PAUL TANNERY bemærker [1]), bero paa lignende indirekte Slutninger. Den direkte Omtale af Vinkler kan saaledes overalt skrive sig fra den Maade, hvorpaa EUDEMOS udtrykker de Sandheder, som THALES praktisk benytter. Kun den som archaisk betegnede Udtryksmaade i 2. kunde tyde paa et Citat, men den kan ogsaa blot være et Forsøg fra EUDEMOS eller PROKLOS paa at udtrykke sig, som han efter den archaiske Sprogbrug antog, at THALES vilde det. De i 1.—3. udtrykte Sandheder fremgaar i hvert Tilfælde saa umiddelbart af

[1]) Géométrie grecque S. 89—93.

iøjnefaldende Symmetriforhold, at THALES næppe vilde have betænkt sig paa at anvende dem uden at udtale dem, hvis han havde Brug for dem. Endnu mærkeligere vilde det være, om man paa det Tidspunkt kunde falde paa udtrykkelig at udtale noget saa selvfølgeligt, som at en Diameter deler en Halvcirkel i to ligestore Dele; det gør man først, naar man laver teoretisk Geometri.

Den eneste af Sætningerne, som fra Indholdets Side frembyder virkelig Interesse, er 4. om Indskrivningen af en retvinklet Trekant i en Halvcirkel, som viser Kendskab til, at Hypotenusen er Diameter i en retvinklet Trekants omskrevne Cirkel. Meddelelsen om THALES' Kendskab til denne Sætning er ganske vist ikke kommen til os ad den samme paalidelige Vej som de andre, nemlig ved PROKLOS fra EUDEMOS, men gennem PAMPHILA, en kvindelig Historiker fra Nero's Tid. Som P. TANNERY bemærker, hindrer denne Omstændighed dog ikke i at antage, at ogsaa denne Meddelelse skriver sig fra EUDEMOS; thi da den ikke vedrører nogen Sætning i EUKLID's I. Bog, vilde PROKLOS ikke som for de andre Meddelelsers Vedkommende have haft Anledning til at medtage den i sin Kommentar til denne Bog.

At THALES kendte denne Sætning, vil dog synes mindre paafaldende, naar man erindrer, at Beskæftigelsen med Rektangler paa det intuitive Standpunkt vist i Reglen, som det er Tilfældet i Çulbasūtraerne, er gaaet forud for Beskæftigelsen med retvinklede Trekanter. Sætningen er da ganske den samme som den, at en Cirkel kan omskrives om et Rektangel, eller at Diagonalerne i et Rektangel er ligestore og halverer hinanden, noget som bliver ret iøjnefaldende ved de Kongruens- og Symmetribetragtninger, som forbinder sig med Synsoplevelser (S. 53 (251)). Det tør da antages, at paa EUDEMOS' Tid en Operation, hvor der netop gjordes Brug af den anførte Sætning, henførtes til THALES. Denne Operation maa under en eller anden Form have gaaet ud paa at konstruere rette Vinkler, maaske paa at konstruere et Rektangel, hvortil end ikke vilde behøves en Tegnepasser, da det vilde være nok at afsætte lige store Stykker paa de fire Ben i de Vinkler, hvori to rette Linier skærer hinanden. Ved Hjælp heraf kan man have lavet de Gnomon'er, som dernæst tjente til at afsætte andre Vinkler (S. 64 (262)). Selv om man ogsaa umiddelbart har benyttet Sætningen til i et Punkt af en ret Linie at oprejse en Linie vinkelret paa denne, har man dertil endnu ikke behøvet Skæring mellem tegnede Cirkler, i hvis Brug OINOPIDES' Fremskridt maa have bestaaet, hvis EUDEMOS' Beretning herom skal have noget paa sig.

Naar nu EUDEMOS i den Mathematikens Historie, som han skrev efter ARISTOTELES' Tilskyndelse, har skullet angive, hvorvidt THALES var kommen i Geometrien, har det været naturligt for ham at anvende den samme Analyse, som hans samtidige benyttede til at forberede geometriske „Elementer“, paa den geometriske Viden, som han vidste, at THALES havde lagt for Dagen, for da ogsaa at finde den Viden, som han da nødvendigvis ogsaa maatte have besiddet for at komme saa vidt; eller maaske har han blot lagt Mærke til, paa hvilke Sætninger i de da allerede foreliggende Elementer af THEUDIOS den er bygget. Efter den saglige Sammenhæng maatte han da netop komme til at tillægge THALES Kendskab til saadanne

Sætninger som dem, vi har kaldt 1.—3. For nøjere at prøve denne Antagelse er det værd at undersøge, hvad vi ved om den Form, hvori disse Sætninger optraadte paa EUDEMOS' Tid. Faar vi end ikke derved fuld Sikkerhed for vor Forklaring af EUDEMOS' Meddelelser om THALES, vil vi paa den anden Side erfare noget om Geometrien umiddelbart før EUKLID, navnlig om den Rolle, som Vinkler mellem rette og krumme Linier eller mellem krumme Linier indbyrdes da spillede.

Hvad nu først den Sætning hos THALES angaar, som vi har kaldt 1., saa findes den hos EUKLID, dog ikke som bevist Sætning, men derimod som Led i I. Bogs Definition 17. paa en Diameter; der tilføjes nemlig, at en saadan deler Cirklen i to ligestore Dele. Den tages altsaa med iblandt Geometriens Forudsætninger. Dette synes i flere Henseender gaadefuldt. For det første synes EUKLID ikke noget Sted at anvende den. Den er da bleven staaende som en Levning fra et ældre Arbejde, hvor den virkelig er bleven anvendt[1]), og hvor den iøvrigt kan være optraadt som Forudsætning eller som bevist Sætning. Det sidste er dog rimeligst, da EUDEMOS omtaler den som en Sætning, og da man paa THEUDIOS' Tid endnu ikke gjorde sig nogen Skrupel af at bevise en saadan Sætning ved at lægge den ene Halvcirkel over paa den anden; men paa dette Punkt var EUKLID særlig forsigtig, hvad man i III. Bog ser af, at han finder det rigtigt ogsaa at opstille Ligestorheden af to Cirkler med samme Radius som Definition 1. I begge Tilfælde havde det dog været ham muligt at ombytte Flytningen med et postulatbestemt „Problem“, ikke at tale om, at Sætningen om Ligestorheden af Cirkler med samme Radius vilde fremgaa af den samme Grænseovergang, som i XII, 1 benyttes til at vise, at to vilkaarlige Cirkler er proportionale med Radiernes Kvadrater. Den THALES tillagte Sætning vil have indbefattet Muligheden af at bringe to Halvcirkler af samme Cirkel samt dertil paa ens Maade knyttede Figurer til Dækning baade ved Forskydning og Omlægning.

For den anden af de THALES tillagte Sætninger, nemlig om Ligestorheden af Vinklerne ved Grundlinien i en ligebenet Trekant, har ARISTOTELES (41^b 6 ff.) meddelt et Bevis, som rimeligvis har været at finde i THEUDIOS' Elementer[2]). Det bygges paa følgende to Sætninger om Vinkler mellem rette Linier og Cirkelbuer: i samme Cirkel er Halvcirklers Vinkler, det er Vinklerne mellem en Cirkelbue og en Diameter, ligestore, og: et Cirkelafsnits to Vinkler, det er de to Vinkler, som en Cirkelbue danner med sin Korde, er indbyrdes ligestore. Begge Sætninger er rimeligvis beviste ved i Overensstemmelse med THALES' Sætning 1. henholdsvis at lægge de to Halvcirkler eller dem, hvori Cirklen deles af Diameteren vinkelret paa Korden, over paa hinanden. Disse Sætninger benyttes (Fig. 11) til at bevise, at Vinklerne ved Grundlinien i en ligebenet Trekant OAB, hvor $OA = OB$, er ligestore, idet de hver for sig i en Cirkel med Centrum O er Differensen mellem en Diameters Vinkel med Periferien og en af Afsnittet AB's Vinkler.

---

[1]) Dens Opstilling minder om, hvad vi (S. 85 (283)) har sagt om Postulat 4., navnlig hvis dette oprindelig har været bestemt til at hævde den Brug af Gnomon, som EUKLID jo netop har gjort overflødig.

[2]) Det forklares nøjere af HEIBERG i Vid. Selsk. Oversigt 1888 S. 1 f.

At, idet vi fuldstændiggør Figuren som paa Fig. 11, Vinklerne ved Grundlinien i Trekant *OAB* er ligestore med Vinklerne ved Grundlinien i Trekant *OCD*, kan man dernæst slutte, idet man nu ogsaa benytter den tredie Sætning, som Eudemos tillægger Thales, nemlig at Topvinklerne ved *O* i disse to Trekanter er ligestore. Saa maa han dog tillige tillægge Thales Kendskab til endnu en Sætning, nemlig enten, at Summen af Vinklerne i hver af disse to Trekanter er lig to rette, eller at de to Trekanter, naar man ved, at de nævnte Topvinkler samt deres Ben er ligestore, kan bringes til Dækning. Kendskab til Sætningen om Vinkelsummen tillægger Eudemos dog først Pythagoreerne, og han kunde ikke have overset det, hvis Thales efter hans Restitution af dennes Bevis maatte have benyttet denne Sætning. Derimod kan han have betragtet Muligheden af at bringe Trekanterne til Dækning som en simpel Følge af, at de vil følge med to Halvcirkler, som kan bringes til Dækning. Paa lignende Maade bliver de 4 Vinkler ved Grundlinierne i Trekanterne *DOA* og *BOC* ligestore, og deraf vil følge, at alle fire Vinkler i Firkanten er ligestore. At de da maa være rette, er ikke en Anvendelse af Sætningen om Vinkelsummen i en Trekant eller en Firkant, men tværtimod, som vi har set, et oprindeligt Kendetegn paa rette Vinkler. Trods sin egen mathematiske Skoling kan ogsaa Eudemos have faaet Blik herfor ved sine Studier af den ældre græske Mathematik, hvilke Kilder han nu har haft til sin Raadighed.

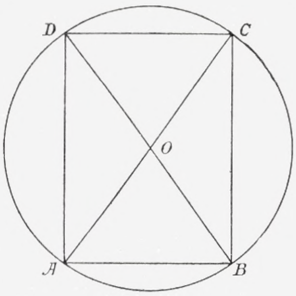

Fig. 11.

Paa denne Maade ser vi, at, naar Eudemos vilde tillægge Thales Kendskab til de Sætninger, som han selv ved en Analyse fandt at ligge til Grund for den Konstruktion af Rektangler og rette Vinkler, som tillagdes ham, og tage saadanne, som fandtes i de da foreliggende Elementer, var intet Valg naturligere end det af de Sætninger, som vi har opstillet som 1., 2. og 3. Naar derved kunde undværes en Henvisning til, at Summen af Vinklerne i en Trekant er to rette, beroede det dog paa, at en Anvendelse heraf kun blev undgaaet ved netop at bestemme rette Vinkler som saadanne, der forekommer som Vinkler i en Firkant med lutter ligestore Vinkler. Skærer man derimod den ene Halvcirkel og med den den ene af de to Trekanter, hvoraf Firkanten bestaar, bort, og vil man saa bevise Sætningen om den anden Trekant, maa man paa denne anvende Sætningen om Vinkelsummen i en Trekant. Derved kommer man omtrent til det Bevis, som findes i Euklid III, 31.[1]).

[1]) Om det direkte Bevis for Thales' Sætning, som maaske har været at finde i Theudios' Elementer, faar man ikke tilstrækkelige Oplysninger i den Begrundelse, som Aristoteles omtaler S. 94 a 28 og 1051 a 26. Det vilde, saavidt man kan se, falde sammen med Euklid's, naar dette udelukkende anvendes paa et særlig simpelt Tilfælde, nemlig en ligebenet retvinklet Trekant. At Heiberg dog deri (Mathematisches zu Aristoteles S. 21) kan tro at se Theudios' Begrundelse af den almindelige Sætning om Periferivinkler i en Halvcirkel, maa bero paa en Forudsætning om, at Theudios ligesom Euklid forud skulde have bevist, at Periferivinkler paa samme Bue er ligestore, og at han derfor kan nøjes med at betragte en af Periferivinklerne paa samme Bue. Den nævnte Forudsætning er imidlertid hos Euklid netop ikke forud bevist om Periferivinkler paa en Halvcirkel. Sætning III, 20., at en Periferi-

Her er jeg gaaet ud fra, at THALES virkelig har kendt den saakaldte „Thales' Sætning“, som vi har betegnet som Nr. 4. Har han derimod, som M. C. P. SCHMIDT antager[1]), ikke gjort det, eller har EUDEMOS ikke kendt andre Konstruktioner af ham, der i EUDEMOS' Øjne vidner om Kendskab til 1.—3., som man paa dennes egen Tid udtrykkelig opstillede som Sætninger, maa allerede THALES have fundet det hensigtsmæssigt udtrykkelig at udtale Sandheder, om hvis Rigtighed ingen, der har haft med Cirkler, skærende Linier eller ligebenede Trekanter at gøre (f. Ex. Bygmesteren af den Gavl, som har gjort THALES opmærksom paa disse) vil have næret nogen Tvivl. I saa Fald vilde THALES have gjort mere, end vi har turdet tillægge ham, nemlig det første Skridt til en theoretisk Behandling af Geometrien; han vilde da være den, som for at give saadanne Sandheder Udtryk har indført Vinkelbegrebet, dog begrænset til ligedannede (ligestore) Vinkler, og Sætningerne 2. og 3. vilde da være bevarede Exempler paa hans Anvendelse af dette Begreb.

Det saaledes begrænsede Vinkelbegreb har i intet Tilfælde ladet vente længe paa sig, og den dertil knyttede Sammenligning af ligestore Vinkler maatte snart udvides til en kvantitativ Sammenligning af uligestore. Man maatte se, at naar ligestore Vinkler ligger som Sidevinkler, kan de adderes, og saasnart man tillige har begyndt i Stedet for Rektangler at betragte de retvinklede Trekanter, hvori et saadant deles ved en Diagonal, saa vil man ikke have været i Tvivl om, at Summen af de spidse Vinkler i en saadan Trekant er en ret Vinkel, eller at Summen af alle denne Trekants Vinkler er to rette. Herfra er Springet ikke langt til som paa Fig. 12 at dele en vilkaarlig Trekant i to retvinklede ved Højden paa en af Siderne og derved finde, at ogsaa Summen af Vinklerne i enhver Trekant er lig to rette. Denne Begrundelse findes, som M. CANTOR har gjort opmærksom paa[2]), i en Bog, der vel

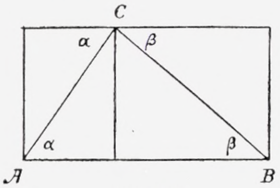

Fig. 12.

vinkel er halv saa stor som Centervinklen paa samme Bue, kan nemlig efter den foreliggende Begrundelse umiddelbart kun finde Anvendelse paa spidse Periferivinkler; thi for rette eller stumpe Vinkler vilde den tilsvarende Centervinkel ikke falde ind under det euklidiske Vinkelbegreb. At EUKLID kun tænker paa Vinkler, som er mindre end to rette, fremgaar nemlig allerede af deres Inddeling i rette, stumpe og spidse i I. Bogs Definitioner 10.—12. Sætning III, 21., at Vinkler i samme Afsnit er lige store, er altsaa endnu kun bevist for spidse Vinkler, altsaa naar det omskrevne Afsnit er større end en Halvcirkel; Sætning III, 22. udvider den dog straks til ogsaa at gælde for Vinkler i et Afsnit, som er mindre end en Halvcirkel, idet det bevises, at Summen af de modstaaende Vinkler i en Firkant indskreven i en Cirkel er to rette. I Beviset anvendes vel III, 21., men saaledes at man kan lade det være spidse Vinkler, hvorpaa den anvendes. Et fuldt gennemført formelt Bevis for, at Periferivinklerne i en Halvcirkel er ligestore, foreligger altsaa endnu ikke, og derfor kan EUKLID i det i III, 31. givne Bevis ikke indskrænke sig til ved Betragtning af det hos ARISTOTELES omtalte specielle Tilfælde at bestemme en fælles Værdi for disse Vinkler, men han beviser direkte, at enhver saadan Vinkel er ret. I Realiteten naar han saaledes alt trods den mindre heldige Ordning af disse Sætninger.

[1]) Se S. 29—41 i det (S. 64 (262)) anførte Skrift. Man vil iøvrigt bemærke, at SCHMIDT i Vurderingen af de forskellige Fremskridt mere ser paa deres Bidrag til EUKLID's færdige synthetiske System end tager saadanne psykologiske Hensyn, som jeg i nærværende Skrift har ment at maatte gøre gældende.

[2]) Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, (3. Auflage), S. 144.

skyldes en anonym Landmaaler fra X. Aarhundrede efter Chr., men som er udskreven efter virkelig gamle Mønstre.

Det saaledes fundne Bevis afviger iøvrigt ikke saa meget, som det i første Øjeblik kunde synes, fra det, som Eudemos tillægger Pythagoreerne (Proklos S. 379). Dette kan tværtimod være fremgaaet af hint ved en meget naturlig Udvikling. Ligesom Begrebet rette Vinkler oprindelig har været knyttet til Rektangler, saaledes er det nemlig ogsaa gaaet med Paralleler, og Thales' udførlig omtalte Konstruktion har ligesaavel været en Konstruktion af Paralleler som af rette Vinkler. Betragtning af Diagonalen i et Rektangel viser da Ligestorheden af de indvendige Vekselvinkler, som en ret Linie danner med to Paralleler, som den overskærer. Fig. 12, der anskuelig fremstiller den Begrundelse, som vi antager for den ældste, vil da, naar vi borttager de tre lodrette Linier, umiddelbart gengive det af Eudemos anførte pythagoreiske Bevis. I dette drages gennem C en Linie parallel med AB. Da er ifølge den anførte Egenskab ved Paralleler de to med α betegnede Vinkler begge lig Trekantsvinklen A, de med β betegnede lig Trekantsvinklen B, og det viser sig, at $A + C + B =$ to rette. Og dette er netop det Bevis, som Eudemos tillægger Pythagoreerne.

Den Maade, hvorpaa vi her kommer til Sætningen om Vinkelsummen, afviger derimod fra en ved Eutokios overleveret[1]) Beretning af Geminos, efter hvilken Sætningen først skulde være vist for ligesidede, dernæst for ligebenede og dernæst for uligebenede Trekanter. Denne tilsyneladende historiske Meddelelse turde imidlertid, som Heiberg bemærker[2]), bero paa en Misforstaaelse af en rent logisk Betragtning hos Aristoteles. Denne bruger nemlig oftere og navnlig 74ᵃ 25 det nævnte Exempel fra Trekanter til at oplyse, at det er at foretrække at bevise en almindelig Sætning ved Argumenter, som paa en Gang gælder alle Tilfælde, for at bevise de enkelte Tilfælde hvert for sig, selv om man ogsaa saaledes kan faa bevist, at den virkelig gælder i alle Tilfælde; men han siger ikke noget om, at det skulde være gaaet saaledes til ved den historiske Opdagelse af Sætningen. Havde Geminos haft sin Oplysning fra en virkelig historisk Kilde som Eudemos, vilde Proklos vel heller ikke have undladt at medtage den i sin Kommentar[3]).

I det mindste fra Oinopides af kunde man konstruktivt flytte Vinkler, derved addere og subtrahere dem og multiplicere dem med hele Tal. Dermed var ogsaa den Opgave at dividere dem med et helt Tal stillet, og en dertil tjenende Kurve,

---

[1]) Apollonios ed. Heiberg II, S. 170.

[2]) Mathematisches zu Aristoteles S. 20.

[3]) Naar Geminos ikke ligefrem øser af ældre historiske Kilder som Eudemos, maa man netop paa Grund af hans større Selvstændighed i Fremhævelsen af det, der netop ligger ham paa Sinde, bruge hans historiske Oplysninger med en vis Varsomhed. Saaledes har det været en uheldig Genvej til at finde de Fremskridt, som i Keglesnitslæren særlig skulde skyldes Apollonios, at se hen til Geminos' korte Omtale af Apollonios' nye Udgangspunkter i Stedet for at søge det ved det ganske vist vidtløftigere Studium af Archimedes' Skrifter og Apollonios' Keglesnitslære selv. Gør man dette sidste, vil man derved ogsaa faa fat paa den rette Betydning og Begrænsning af Geminos' Bemærkninger om det sidstnævnte Værk. (Se min Keglesnitslæren i Oldtiden, 2. Afsnit).

som i alt Fald kunde give en theoretisk Opløsning, nemlig Hippias' Kvadratrix, blev tidlig udtænkt. En praktisk Halvering ved Lineal og Passer turde dog være ældre; den egnede sig ogsaa, men uden at disse Redskaber nævnes, til Optagelse paa sit Sted (se forrige Kapitel) i Euklid's Elementer. Da det ikke lykkedes at tredele Vinklen ved Lineal og Passer, har man udtænkt forskellige Maader at løse denne Opgave paa ved en Indskydning (νεύσις), og da Brugen af dette Hjælpemiddel ikke hjemledes ved Euklid's Postulater, maatte for denne Opgave Brugen af Keglesnit blive obligatorisk fra den Tid af, da man havde godkendt disses Anvendelse til Konstruktion af to Mellemproportionaler.

De her omtalte Konstruktioner vedrører kun Vinkler mellem rette Linier. Om saadanne Vinkler har vi iøvrigt i Kap. VIII set, at den kvantitative Betydning af det i Def. 9. foreløbig indførte Vinkelbegreb, som af andre geometriske Størrelsesbestemmelser, gives i „Almindelige Begreber" 7. og 8., men at man for at benytte denne uden mekanisk Flytning, maatte støtte sig til en konstruktivt anvendelig Bestemmelse af lige store Vinkler, nemlig som ensliggende Vinkler i Trekanter med ligestore Sider. Retlinede Vinkler er dernæst delagtige i det Kendetegn, som Euklid i V. Def. 4. opstiller paa Størrelser, paa hvilke den i denne Bog indeholdte almindelige Proportionslære, som i Virkeligheden er en almindelig Størrelseslære, skal kunne anvendes; thi ogsaa om dem gælder det, at en Vinkel „ved at mangfoldiggøres kan overgaa" en anden Vinkel. Derfor kan Euklid ogsaa i VI, 33. føre et almindeligt Bevis for, at retlinede Vinkler er proportionale med de Buer, til hvilke de i samme eller ligestore Cirkler er Centervinkler eller Periferivinkler.

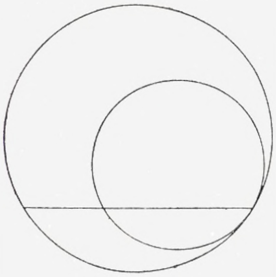

Fig. 13.

Forudsætningen for Proportionalitet gælder derimod ikke, naar den ene Vinkel er krumlinet eller blandetlinet, den anden retlinet. Af Sætning III, 16., hvori det udtales, at i et Punkt af en Cirkelperiferi ingen ret Linie kan drages i Mellemrummet mellem den Linie, som staar vinkelret paa Diameteren til dette Punkt (altsaa Tangenten), og Periferien, fremgaar, at Tangentens Vinkel med Periferien er mindre end enhver retlinet spids Vinkel. Om den gælder altsaa ikke, at den „ved at mangfoldiggøres kan overgaa" en given retlinet Vinkel. En saadan „hornformet" Vinkel har altsaa intet Forhold til en retlinet Vinkel. Dens Behandling gaar altsaa ikke ind under Euklid's almindelige Størrelseslære i V. Bog; det samme vil gælde om andre Vinkler mellem hinanden skærende rette Linier og Cirkelbuer eller saadanne indbyrdes; thi disse er Summer eller Differenser af retlinede og hornformede Vinkler. Da nu disse sidste ifølge III, 16. er forsvindende i Sammenligning med de første, vilde det have været rigtigst af Euklid, da han dog heller ikke anstiller nogen Sammenligning mellem hornformede Vinkler indbyrdes, i Stedet for om Vinklerne mellem krumme Linier udelukkende at tale om Vinklerne mellem disse Liniers Tangenter. Naar han dog ikke indskrænker sig dertil, men taler om et Afsnits eller en Halvcirkels Vinkler uden f. Ex. at sige, at disse sidste er rette, giver dette endog

Anledning til en formel Selvmodsigelse. At sige i III. Def. 11., at ligedannede Cirkelafsnit er saadanne, hvis Vinkler (ɔ: Buens med Korden, III, Def. 7.) er ligestore, staar saaledes (se Fig. 13) i formel Strid med I Alm. Begr. 8., som siger, at en Del er mindre end det hele. EUKLID har imidlertid paa dette som andre Punkter bevaret Begreber, som han dog ikke gør nogen virkelig Brug af.

EUKLID's III, 16. indeholder i Virkeligheden Forklaringen af denne Selvmodsigelse og forbyder ham at anvende den almindelige Størrelseslære i V. Bog paa krumlinede Vinkler; men den berørte Selvmodsigelse peger hen paa en Uklarhed, som oprindelig maa have været tilstede i den intuitive Opfattelse af krumlinede Vinkler, af hvilke man, som vi har set, før ham har gjort mere omfattende Brug. Psykologisk beror den tildels paa en Sammenblanding af de to til Grund liggende Synsoplevelser af en Vinkel som Konturvinkel eller som Fladevinkel. Den første gives der Udtryk i EUKLID I, Def. 8., naar det siges, at Vinklen er Heldningen (κλίσις) af det ene rette eller krumme Ben mod det andet, den sidste, naar „Alm. Begreber" 7.—8. lægges til Grund for Sammenligningen mellem Vinklers Størrelser, og naar disse subtraheres som i det efter ARISTOTELES anførte Bevis, S. 98 (296). Kun for retlinede Vinkler vil de to Betragtninger give samme Resultat.

Det er ogsaa den sidste Opfattelse, som RUBIN lægger til Grund for sine Forsøg paa experimentalt at bestemme den retlinede Vinkel, som vil synsopleves som ligestor med en forelagt krumlinet Vinkel. Man vil være udsat for, at Forsøgspersonerne trods al Instruktion vil gøre sig skyldige i den samme Sammenblanding af Konturvinkel og Fladevinkel, som vi talte om, og Spørgsmaalet er i det hele saa kompliceret, at Besvarelserne paa Grund af forskellig Opfattelse af Instruktionerne og forskellig Sansning rimeligvis vil blive ret individuelle. At den sidste Forskellighed vil gøre sig gældende, ses ved at reducere Spørgsmaalet til det rent fysiologiske om Sansning med et enkelt Øje, der fra given Afstand ser i en given Retning.

Vi vil antage, at Øjet befinder sig i given Afstand fra Vinklens Plan, lodret over Vinkelspidsen, og at det ser lige ned mod denne, og at a er Radius i den Cirkel, som Øjet da overhovedet kan sanse i Planen[1]). I denne bruger vi polære Koordinater med Polen i Vinkelspidsen og antager, at Vinkelbenene er bestemte ved Ligningerne $\vartheta = \varphi(r)$ og $\vartheta = \psi(r)$. Ved $f(r)$ vil vi betegne den Tydelighed, hvormed man vilde se et Element af Størrelsen 1., hvis dette kunde koncentreres i Afstanden r. Da vil vi kunne bestemme Vinklen v opfattet som Fladevinkel ved Integralet

$$v = \int_0^a f(r)\big(\psi(r) - \varphi(r)\big)\, r dr.$$

Dette vil føre til den sædvanlige Bestemmelse af Forholdet mellem retlinede

[1]) Vi gør den rent fysiologiske Forudsætning, at baade denne Flade er en Cirkel, og at de lige tydelig sansede Punkter af denne ligger paa koncentriske Cirkler; om denne Forudsætning er rigtig, maa kunne undersøges ved at prøve de deraf afledede Resultater. Er den det ikke, kompliceres Forholdene yderligere.

Vinkler, idet da $\psi(r) - \varphi(r)$ bliver uafhængig af r, og a kun indgaar i den for alle Vinklerne fælles Faktor $\int_0^a f(r)\,rdr$. Er derimod en af de Vinkler, hvis Forhold bestemmes, krumlinet, vil Radius a for Synsfeltet indgaa i dette Forhold. a svarer imidlertid til en bestemt Afstand for Øjepunktet. Skulde en friere Synsoplevelse give en bestemt Værdi for v's Forhold til en Vinkelenhed, maatte der være en bestemt Afstand, som betragtedes som den normale. Denne vilde være forskellig for nær- og fjernsynede Øjne. Efter Øjets Beskaffenhed vilde den til en given Afstand svarende Værdi af a og Funktionen $f(r)$ rimeligvis ogsaa blive forskellige. Der er altsaa ingen Udsigt til, at man gennem Synsoplevelse vil komme til nogen fælles Vurdering af krumlinede Fladevinklers Størrelse.

Dette hindrer ikke, at man kan komme overens om en til det opstillede Integral knyttet mathematisk Bestemmelse, hvor Forholdet mellem de Grænseværdier, som Integralerne antager for lim. $a = 0$, opfattes som Forholdet mellem Vinklerne. Vinkler mellem Kurver, der berører hinanden, vil da afhænge af Kurvernes Krumning. Denne Indskrænkning til lim. $a = 0$, vil imidlertid være en Opgivelse af Betragtningen af en endelig Udstrækning af Fladevinklen eller Takken og udelukkende knyttes til Konturen, og den hele Betragtning har, foruden den Ombytning af Vinkler mellem hinanden skærende Kurver med Vinkler mellem deres Tangenter, som Euklid burde have fastholdt, ingen Tilknytning til opbevarede antike Undersøgelser.

Kap. XI.

Bevisers Almindeliggørelse; infinitesimale Opgaver.

En Hovedbetingelse for, at den omformede Geometri virkelig skulde blive rationel, var selvfølgelig Brug af fuldt ud almindelige Beviser, som ikke paa noget Punkt nøjedes med ufuldstændige Induktioner, heller ikke saadanne, hvor der sluttes til den fulde Almindelighed fra uendelig mange uendelig tæt paa hinanden følgende Tilfælde. En saadan Slutning vil gøres, naar en Sætning bevises under den Forudsætning, at de deri indgaaende Størrelser er kommensurable, og den dernæst betragtes som gældende uden denne Indskrænkning. Ligeledes, naar man i de infinitesimale Undersøgelser uden nogen strengt kontrolleret Grænseovergang anvender paa Grænsetilfælde, hvad der kun er bevist om Størrelser, der nærmer sig til en vis Grænse. Selve Opdagelsen af irrationale Størrelser maatte dog tidlig henlede Opmærksomheden paa Utilstrækkeligheden af saadanne Beviser, og denne Utilstrækkelighed stilledes til Skue ved Zenon's Paradoxer. Der krævedes dog en længere Udvikling, under hvilken man gik frem saavel i Paavisningen af forskellige

Størrelsers Irrationalitet som i den almindelige Behandling baade af irrationale Størrelser og af infinitesimale Bestemmelser, der bar god Frugt, selv om den ikke var helt exakt, før de paapegede Mangler kunde blive fuldt forstaaede og afhjulpne. Med denne Udvikling og dens Afslutning ved den Behandling, som findes i Euklid's Elementer har jeg beskæftiget mig i de mindre Arbejder, som findes anført S. 12 (210) Note 1, og jeg har paavist, hvorledes de her omtalte Hensyn har givet Euklid Anledning til hans Fordeling af sit Stof i de 13 Bøger.

Jeg har ogsaa anført, at det er Eudoxos, hvem Grundlaget for denne Behandling skyldes. Han levede jo imidlertid netop ved Begyndelsen af den Tid fra Platon til Euklid, hvis Reformer vi her særlig undersøger. Det vil derfor ogsaa nok være værd at faa Oplysninger om, hvorvidt Eudoxos selv i det væsentlige har givet Behandlingen af de paagældende Spørgsmaal den Skikkelse, som vi finder hos Euklid, eller om en videre Udvikling har fundet Sted i Mellemtiden eller fra den sidstes Side, ligeledes om muligvis noget Skridt paa denne Vej maatte være gjort før Eudoxos. Meget lader sig ikke sige herom, men et Bidrag faas dog ved de mathematiske Steder hos Aristoteles, som Heiberg har samlet i „Mathematisches zu Aristoteles", særlig dem, som findes S. 11 og S. 22—23.

For nu at gøre den rette Brug af disse vil det være godt først at anføre de Steder hos Euklid, hvorpaa han bygger Læren om Forhold mellem inkommensurable Størrelser og de infinitesimale Bestemmelser, og at nævne de Anvendelser, som Euklid gør deraf.

V, Def. 4. udtaler, at Størrelser siges „at have et Forhold, naar de ved at mangfoldiggøres kan overgaa hinanden". — For at tale om Forhold mellem to forelagte Størrelser eller maale dem med hinanden, maa man altsaa vide eller postulere om dem, at de tilfredsstiller denne Betingelse. Dertil kræves ikke alene, at de er af samme Art, men ogsaa, som vi har set ved hornformede Vinkler, at den ene ikke er at betragte som forsvindende i Forhold til den anden.

Af dette Postulat udledes Sætning X, 1: „Naar der er afsat to ulige store Størrelser, og der fra den største trækkes en, der er større end Halvdelen, og fra Resten en, der er større end dens Halvdel, og man bliver ved med det, vil der blive en eller anden Størrelse til Rest, som vil være mindre end den afsatte mindste Størrelse". — At Størrelserne er „afsatte" (som Liniestykker), viser, at Talen er om Størrelser, der efter V, Def. 4. „har et Forhold".

Vi skal straks vende tilbage til den Brug, som i selve X. Bog gøres af X, 1. I XII. Bog lægger Euklid den til Grund for de infinitesimale Grænsebestemmelser af Forholdet mellem to Cirkelarealer (2.) eller Kuglevoluminer (18.), og i 5. bruges den til at forberede Bestemmelsen af Forholdet $\frac{1}{3}$ mellem en Pyramide eller Kegle og Prismet eller Cylinderen paa samme Grundflade. Den bliver særlig skikket til saadanne Grænseovergange, da den kan bruges til at gøre en passende valgt foranderlig Størrelse mindre end enhver opgiven Størrelse. Naar saaledes Forholdet mellem to variable Størrelser altid har Værdien B, og man kan bevise, at disse Størrelser kan vælges saaledes, at Differensen mellem deres Forhold og det ubekendte Forhold A mellem to forelagte Størrelser i hvert Fald kan gøres mindre end enhver given Størrelse, saa maa denne Differens være 0 eller $A = B$. Dette bevises ved en *reductio ad absurdum*, idet den Antagelse, at $A - B \neq 0$ vilde føre til en Selvmodsigelse.

Archimedes bevidner saavel i Indledningen til Skriftet om Kuglen og Cylinderen som i Ephodos, at Eudoxos først har ført et exakt Bevis for en af de anførte Sætninger, nemlig den om Pyramiden og Keglen. I Ephodos meddeler han tillige, at Demokritos tidligere havde opstillet denne Sætning, men uden et saadant Bevis, som man paa Archimedes' Tid vilde anse for fyldestgørende. Som fyldestgørende anser han derimod Eudoxos' Bevis, og dette maa i Hovedsagen være ført efter det samme Princip, som han selv følger i sine egne Beviser. Dette Princip anfører han i Indledningen til Skriftet om Parablens Kvadratur, hvor han tillige omtaler de nysnævnte tidligere Anvendelser, som findes hos Euklid. Umiddelbart er ganske vist det af Archimedes anførte Princip det, som findes i Euklid V, Def. 4.; men da X, 1. er udledet deraf, er det i Hovedsagen ogsaa det samme, som vi fandt anvendt i Euklid XII. Selv giver dog Archimedes sine Beviser en elegant Form, der ikke bygger paa Euklid X, 1, men umiddelbart paa det i V, Def. 4. udtrykte Princip, hvorom han minder.

Fra Archimedes ved vi altsaa, at den af Euklid og ham selv anvendte Formulering af en exakt Grænseovergang skyldes Eudoxos og af denne er anvendt i de af Euklid behandlede Tilfælde. Derfor behøver Eudoxos ikke at have behandlet disse ganske paa samme Maade som Euklid. Han kan f. Eks. godt, som Demokritos synes at have gjort, have anvendt Delingen af Pyramider og Kegler ved Snit parallele med Grundfladen og ikke som Euklid en uendelig Række Prismer af aftagende Størrelse indskrevne i den tresidede Pyramide. Det nye, som skyldtes Eudoxos, var det opstillede Grundlag for en exakt Behandling, hvorimod egentlige geometriske Operationer allerede før Eudoxos og Platon var naaet vidt nok til, at man kunde finde forskellige geometriske Former for Tilnærmelsen.

Den i Euklid XII. benyttede Methode lod sig imidlertid ikke blot anvende, naar Talen er om Tilnærmelse til en bestemt angivet Grænse, men ogsaa til at sammenligne to Grænseværdier. Da disse ikke som i moderne Behandling udelukkende defineres ved selve Grænseovergangen, men betragtes som existerende i Kraft af den geometriske Fremstilling, $\sqrt{2}$ f. Ex. som Forhold mellem Diagonal og Side i et Kvadrat, kan vi kalde Grænseværdierne A og B og forudsætte, at A' og B' er Størrelser, der samtidig antager saadanne Værdier, som tilfredsstiller Betingelserne $A' = A \pm k$, $B' = B \pm l$, hvor k og l kan gøres mindre end enhver opgiven Grænse. Er da samtidig $A' = B'$, maa man have $A = B$. Ogsaa herved gælder det kun om at bevise Grænseovergangen for A' og B', hvortil atter X, 1 kan benyttes. Paa lignende Maade kan man bevise $A > B$, naar $A' - B'$ vedblivende er større end en given Størrelse.

Dette kan anvendes til at sammenligne Forhold mellem inkommensurable Størrelser; men herpaa tager Euklid dog fat paa en anden Maade. I sin V. Bog, hvis Forhold har ganske samme Betydning som den moderne Mathematiks almindeliggjorte Tal, opnaar han dette ved en elegant Brug af V. Def. 4., som staar i samme Forhold til den her nævnte Grænsemethode, som DEDEKIND's Snitmethode staar til moderne Anvendelser af Grænsemethoden. Dette opnaas ved Hjælp af Definitionerne 5. og 7. i V. Bog, som udtrykker Betingelserne for Ligestorhed eller Uligestorhed af to Forhold. Ved Brug af moderne Tegn kan disse udtrykkes saaledes:

$$a : b = c : d$$

naar (5.) for alle hele Tal m og n $ma \gtreqless nb$ medfører $mc \gtreqless nd$;

og $$a : b > c : d$$

naar der (7.) gives saadanne hele Tal m og n, at

$$ma > nb, \text{ men } mc \overline{\overline{<}} nd.$$

Det er paa disse Bestemmelser, at Proportionslæren i V. Bog er bygget.

I den moderne Mathematik er man gaaet følgende Skridt. Først har man nøjedes med en ubevist Grænseovergang fra, hvad der er bevist om rationale Tal (Forhold mellem kommensurable Størrelser) til Anvendelser paa irrationale. Dernæst har man benyttet samme Overgang med Bevis for dens Rigtighed. Endelig har man anvendt DEDEKIND's Snitmethode. I Oldtiden har man — „selvfølgelig“ kan det næsten siges — begyndt med det første Skridt, om man end mere eller mindre kan have skjult Manglen paa egentligt Bevis for sig selv ved Brug af den geometriske Fremstilling[1]), der samtidig omfatter irrationale og rationale Størrelser. ZENON's Paradoxer viser den logiske Utilstrækkelighed af denne Fremgangsmaade, som Mathematikerne dog ikke kunde undvære, saalænge de ikke havde nogen anden. Det tredie Skridt, hvor V, Def. 4. bruges, er gjort i EUKLID's V. Bog. Det ligger dog ikke fjernt at antage, at ogsaa Grækerne først er naaet dertil gennem det af os betegnede andet Skridt som et Mellemstadium, paa hvilket de har bevist selve Grænseovergangen ved Hjælp af EUKLID X, 1. Dette vilde ganske svare til de Skridt, der lader sig eftervise for infinitesimale Bestemmelsers Vedkommende, nemlig 1. ubeviste Grænseovergange som DEMOKRIT's for Pyramide og Kegle og de langt ældre (se S. 88 (286)), hvorved man i sin Tid har sluttet Cirkelperiferiers Proportionalitet med Diametren, Cirklernes med Kvadraterne paa Diametrene; 2. Grænseovergange beviste ved EUKLID X, 1. som i EUKLID XII; 3. Grænseovergange omdannede og beviste ved EUKLID V, Def. 4. som hos ARCHIMEDES.

Det lader sig nu virkelig ved Hjælp af de af HEIBERG anførte Steder hos ARISTOTELES eftervise, at man ogsaa for Forhold mellem inkommensurable Størrelser til en Tid har benyttet den anførte Mellemform: Grænseovergang bevist ved EUKLID X, 1., som da paa sin Side enten kan være udledet af EUKLID V, Def. 4., der i saa Fald maatte være opstillet forud, eller snarere tidligere direkte opstillet som et Postulat.

Vi skal først nævne, at ARISTOTELES viser sit Kendskab til begge disse Ud-

[1]) Se Oversigt 1915 S. 338, Note.

gangspunkter for exakte Infinitesimal- eller Grænsebestemmelser ved 266^b, 2 at sige, at man, naar en Størrelse er given, ved at lægge til kan overskride og ved at trække fra naa under enhver given Grænse. Et andet Sted baade fremhæver han Nødvendigheden af nøjagtig at definere, hvad man mener med at sætte to Forhold mellem inkommensurable Størrelser lige store, og lægger samtidig for Dagen, til hvilken Definition han sigter. Han siger nemlig 158^b 29:

ἔοικε δὲ καὶ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον καὶ ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον· τὴν γὰρ αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί, ἔστι δ' ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος.

Ogsaa i Mathematiken synes et og andet at være vanskeligt at fremstille paa Grund af Mangel paa Definition, f. Ex. at den Linie, der skærer et Parallelogram parallelt med en Side, deler baade Linien [ɔ: en af de andre Sider] og Fladen paa samme Maade [ɔ: proportionalt]. Men naar Definitionen er udtalt, er Sætningen straks indlysende; thi Fladerne og Linierne har samme Antanairesis og dette er Definitionen paa samme Forhold [Proportionalitet].

Kunstordet *ἀνταναίρεσις* gengives af ARISTOTELES' Kommentator ALEXANDROS (in Top. S. 545,15 ed. Wallies) ved Ordet *ἀνθυφαίρεσις*, som i EUKLID VII, 2 og X, 2 bruges om de Subtraktioner, som anvendes ved den sædvanlige Bestemmelse af største fælles Maal. Da de dertil tjenende Operationer er de samme, som nu bruges ved Udvikling i Kædebrøk, kan man, selv om Grækerne, der jo paa den Tid end ikke brugte Brøksform (S. 17 (215)), ikke kendte til nogen Opstilling som Kædebrøk, noget frit oversætte Antanairesis ved „Udvikling i Kædebrøk". De nævnte Steder anvendes denne Operation til at prøve, om to Størrelser er kommensurable eller inkommensurable. Det sidste vil være Tilfældet, naar Operationen ikke kan bringes til Ende. Dette er en speciel Form for den her fremsatte Definition paa Ligestorhed af Forhold; thi at to Størrelser har en Antanairesis, som ikke kan føres til Ende, tilkendegiver netop, at deres Forhold ikke tilfredsstiller Betingelsen for at være ligestort med Forholdet mellem to hele Tal, da dette har en endelig Antanairesis. Idet nu efter ARISTOTELES ogsaa i Almindelighed Ligestorheden prøves ved den fortsatte Overensstemmelse mellem de paa Forholdene anvendte Antanaireses, altsaa ogsaa mellem de Kædebrøker, som faas ved at standse disse paa samme Sted, udtrykker Definitionen, at man bestemmer Værdien af et Forhold som Grænseværdien for de af Forholdet dannede Kædebrøkskonvergenter.

Dermed har man altsaa i hvert Fald det første af de forannævnte Trin. Dette kan man fra først af have troet tilstrækkeligt, idet man formente, at Tilnærmelsesbrøkerne virkelig gav en saadan Bestemmelse af Grænseværdierne, at man af de førstes Ligestorhed eller Uligestorhed umiddelbart kunde slutte de sidstes, med andre Ord, at en given Antanairesis repræsenterer en derved fuldkommen bestemt

Størrelse. At nu dog denne Formening kræver et Bevis, har man, som Begyndelsen af EUKLID's X. Bog viser, erkendt allerede i det førnævnte specielle Tilfælde, idet Sætningen X, 1. eller (hvad den maatte være, saalænge den ikke udlededes af V., Def. 4.) „Postulatet" X, 1. er sat i Spidsen som Grundlag for Beviset for, at to Størrelser, der giver en uendelig Antanairesis, er inkommensurable. Saa meget mere nødvendigt var det ogsaa at bygge den almindelige Paastand om Ligestorhed af Forhold med samme Antanairesis paa samme Forudsætning. Dermed var det andet Trin, bevist Grænseovergang, naaet. At dette allerede var sket paa ARISTOTELES' Tid[1]), fremgaar af hans alt omtalte Kendskab til EUKLID V, Def. 4. og X, 1.

Vor Formodning om, at den græske Mathematik ogsaa har taget dette Mellemtrin med, inden den naaede til V. Bogs Bestemmelse af Ligestorhed af Forhold, har altsaa bekræftet sig. Idet ALEXANDROS paa det nys anførte, af HEIBERG citerede, Sted gentager ARISTOTELES' Definition paa lige store Forhold, meddeler han, at de gamle (*οἱ ἀρχαῖοι*) brugte den. Dette er saaledes sket, før man gik over til den Definition, som opstilles i EUKLID V, Def. 5., og dermed til det af os betegnede tredie Trin.

Forskellen mellem den hos ARISTOTELES og hos EUKLID angivne Definition kan betegnes som en Forskel mellem Analyse og Synthese. Ved at anvende en Antanairesis paa Forholdet mellem to forelagte Størrelser anvender man samme Operation, som naar Forholdet mellem to kommensurable Størrelser skal forkortes, til muligvis at sætte simplere Forhold i Stedet. Det sker ved Divisioner, eller ved sukcessivt at subtrahere Multipla af den ene fra den anden. Er Størrelserne inkommensurable, lykkes det ikke at komme til Ende hermed; men to Forholds Ligestorhed viser sig ved, at Operationen anvendt paa dem stadig giver samme Resultater. Om den derved konstaterede Ligestorhed, som er fundet ved gentagne Divisioner, er tilstede, kan man omvendt prøve ved Multiplikation af Forholdenes Led. Derved kommer man til den euklidiske Definition V, 5. paa Forholdenes Ligestorhed, som giver den synthetiske Prøve paa Resultatet af den nævnte Analyse. At den kan gennemføres, er sikret ved Definition V, 4.; denne udtrykker, at man ved Multiplikation af en Størrelse kan naa udover en anden, og giver saaledes en Prøve paa X, 1., der udtrykker, at man ved sukcessive Subtraktioner eller en dermed ensgældende Division af den anden kan naa ned under den første.

Stedet hos ARISTOTELES gør det sandsynligt, at endnu THEUDIOS har anvendt den „archaiske" Definition paa Ligestorheden af to Forhold[2]). Denne har let kunnet anvendes til at bevise Sætninger om Proportionalitet af geometriske Størrelser; saaledes kan man i det af ARISTOTELES nævnte Exempel se, at de til Forholdet

[1]) Herved bortfalder den Formodning, som jeg fremsætter i Oversigt 1915 S. 354, om at muligvis først EUKLID skulde have bemærket Nødvendigheden af at anvende X, 1 til at begrunde det af THEODOROS og THEAITET anvendte Kendetegn paa Inkommensurabilitet. Dette turde tværtimod have været et af de første Tilfælde, hvor man har set Nødvendigheden af et Bevis for den benyttede Grænseovergang.

[2]) Hermed passer ogsaa de i HEIBERG: Mathematisches zu ARISTOTELES S. 11 anførte Steder ligesaa godt som med Anvendelse af den euklidiske Proportionslære.

mellem Sider og Forholdet mellem Arealer hørende Antanaireses følger hinanden Skridt for Skridt, og paa lignende Maade gaar det med de fleste af de i EUKLID VI opstillede Sætninger, der direkte angaar Proportionalitet og Ligedannethed. Men Antanairesis er i sig selv en vidtløftig Operation og giver derfor et mindre overskueligt Kendemærke end den i EUKLID V, Def. 5. angivne Multiplikationsprøve. Den sidstes Anvendelse paa et bestemt Tilfælde lader sig derfor udtrykke med større Præcision. Og at bygge en saa almindelig og abstrakt Lære om Proportioner og disses Omdannelse som den, vi finder i EUKLID's V. Bog, paa gentagen Anvendelse af Antanairesis turde blive vidtløftigt og er næppe gennemført.

EUKLID's Proportionslære beror derimod paa en konsekvent gennemført Brug af den i V, Def. 5. og 7. nøjagtig beskrevne Multiplikationsprøve. Naar derfor HEIBERG i denne nærmest blot ser en bedre Formulering af den Prøve paa Ligestorhed af Forhold, som findes hos ARISTOTELES, og mener, at denne Forbedring kunde skyldes EUKLID, vilde dette føre til en Konsekvens, som HEIBERG vel næppe vilde tage, nemlig at det Mesterstykke, som Proportionslæren i V. Bog er, hovedsagelig skulde skyldes EUKLID tværtimod den Tradition, som fører den tilbage til EUDOXOS. Denne Tradition, der kommer til Orde i et Scholie til EUKLID's Elementer[1]), turde i alt Fald være rigtig for Grundlagets Vedkommende, hvad der ogsaa stemmer med, at ARCHIMEDES, der nævner EUDOXOS som den, der har opstillet Grundlaget for Infinitesimalundersøgelser, andetsteds meddeler det dertil tjenende Postulat i den Form, som det har i V. Bog, medens EUDOXOS udenfor Proportionslæren rimeligvis, som EUKLID i XII. Bog, har anvendt dets Omdannelse til X, 1.

Den Omstændighed, at ARISTOTELES dog ikke viser noget Kendskab til den Form for Proportionslæren, som er gennemført hos EUKLID, men holder sig til den „archaiske" Definition paa Proportioner, kan maaske forklares saaledes, at den nye Definition vel var opstillet af EUDOXOS indenfor Mathematikernes Kreds og dens Brugbarhed som Grundlag for en fuldstændig Proportionslære paavist, men at en saadan endnu ikke var udviklet saaledes i sin fulde Sammenhæng, at THEUDIOS kunde bruge den i sine Elementer, og at ARISTOTELES kendte den eller kunde henvise sine Disciple til den som Exempel. Hertil var da den ældre og mere kendte Definition bedre egnet. Muligheden, ja, Rimeligheden for, at der gik nogen Tid mellem EUDOXOS' Opstilling af en ny Definition og en fuldstændig gennemført Brug af denne, fremgaar ved en Sammenligning med Nutiden, hvor DEDEKIND's Opstilling af Snitmethoden jo ikke straks medførte en gennemført Brug deraf i alle de Tilfælde, for hvilke den er bestemt. EUDOXOS kan derfor godt være Grundlægger af den i EUKLID V. indeholdte Proportionslære, medens en af hans Efterfølgere, rimeligvis EUKLID, har Æren for den konsekvente Gennemførelse af denne Lære, som vi finder paa det anførte Sted. Et uundværligt[2]) Supplement til denne Lære,

---

[1]) HEIBERG's Udgave af EUKLID, V. S. 282,13. Det kan dog tænkes, at Scholiasten støtter sin Angivelse paa det samme Sted hos ARCHIMEDES, som vi ogsaa her henviser til.

[2]) Herpaa gøres ogsaa opmærksom i min „Forelæsning over Mathematikens Historie". (Dansk Udgave S. 127, Tysk S. 145, Fransk S. 119), hvor Brugen af sammensatte Forhold tillige paavises.

der som Existensbevis efter det først ved EUDOXOS' Discipel MENAICHMOS indførte Princip maatte føres ved en geometrisk Konstruktion og derfor henvises til VI. Bog, maa særlig antages at skyldes EUKLID. Det vedrører et Hovedpunkt af Proportionslæren, nemlig Dannelsen af sammensatte Forhold EUKLID V., 22. (og 23.), denne Form, hvorunder Multiplikation (og Division) af de ved Forhold fremstillede rene Tal (i moderne Betydning) udføres. Ved Sammensætning af to Forhold forudsættes det nemlig, at man har givet dem Formerne $a:b$ og $b:c$, og det sammensatte Forhold bliver da $a:c$. For altsaa at kunne anvende Sammensætningen paa et vilkaarligt Forhold $e:f$ maa dette kunne skrives under Formen $b:c$. Dette bevises i EUKLID VI, 12. ved Konstruktion af fjerde Proportional til e, f og b. Ligeledes vises Existensen af en Mellemproportional i VI, 13. ved dens geometriske Konstruktion.

Kan der saaledes ikke siges noget bestemt om, hvor langt frem EUDOXOS har ført Proportionslæren, kan der ogsaa være nogen Tvivl om, paa hvor tidligt et Trin, han har grebet ind. THEAITET, der, rimeligvis i Tilslutning til THEODOROS, har benyttet Antanairesis som Kendetegn paa, om to Størrelser er kommensurable eller ej (Oversigt 1915, S. 356), maa have anvendt den samme Proces til at prøve, om to Forhold er ligestore eller uligestore, et Spørgsmaal, som han for Anvendelsernes Skyld ikke kan have ladet ubesvaret. Om hans Behandling af Proportioner dermed har staaet paa det første eller andet af de af os betegnede Trin, beror dels paa, om han blot stiltiende har benyttet dette Kendetegn eller udtrykkelig udtalt det, dels paa, om han har været opmærksom paa, at Brugbarheden af dette Kendetegn saavel som det i EUKLID X, 2. opstillede Kendetegn paa Inkommensurabilitet afhænger af en Anerkendelse af den i EUKLID X, 1. opstillede Sætning, og om han udtrykkelig har opstillet denne. I saa Fald har det dog vistnok været som Postulat; thi der er næppe Grund til at tro andet, end at det er EUDOXOS, der ved en yderligere Analyse har fundet, at man kan gaa tilbage til det i V, Def. 4. opstillede Postulat og deraf udlede X, 1. som Sætning. At det i hvert Fald er EUDOXOS, der udenfor Proportionslæren har anvendt X, 1. til saadanne infinitesimale Bestemmelser som dem i EUKLID XII, er efter ARCHIMEDES' Vidnesbyrd ganske utvivlsomt.

Som man vil se, er det kun Spørgsmaal om de enkelte Personers Andel i de forskellige Fremskridt, der kan underkastes Tvivl. Saadanne vil imidlertid aldrig udeblive, naar forskellige Personer staar i nogen Forbindelse under deres Arbejde paa samme Sag (smlgn. Fremskridtene i det XVII. Aarhundrede). Den historiske Rækkefølge af selve Fremskridtene turde derimod være godt opklaret ved de sparsomme Oplysninger, som vi har om den Tid, der gaar forud for EUKLID's Elementer. Af disse Oplysninger er det anvendte Sted hos ARISTOTELES et værdifuldt Led.

Kap. XII.

Almindeliggørelse af Sætninger; Brug af Ligninger af 2. Grad.

I ARISTOTELES' Analytica Posteriora I, 5. opstilles den Fordring, at de Forudsætninger, under hvilke en Sætning bevises (og udtales) bør være de almindeligste, under hvilke den samme Sætning gælder. I Geometrien maa dette Krav gaa ud paa, at den Figur, som en Sætning gælder, bør være den almindeligste Figur, for hvilken, den er rigtig. Det oplyses ved følgende geometriske Exempel (ARISTOTELES 74[a] 13): Hvis nu nogen har vist, at de rette Linier vinkelrette (paa en og samme Linie) ikke skærer hinanden, kunde det synes, at hans Bevis gjaldt paa Grund af, at de alle er vinkelrette; men saaledes forholder det sig ikke; det gælder ikke, fordi de netop paa denne Maade danner ligestore Vinkler, men fordi de overhovedet danner ligestore Vinkler. ARISTOTELES, som paa dette Sted henter flere Exempler fra Geometrien, udtaler vistnok her og mange andre Steder, hvad Geometerne, særlig de, der arbejdede paa den Reform, som beskæftiger os, selv gjorde gældende. Men hans Fremsættelse og Almindeliggørelse af denne oprindelig geometriske Regel maatte bagefter give den forøget Autoritet, ikke mindst for Elementforfatteren. EUKLID har da ogsaa fulgt den og særlig i sin VI. Bog benyttet den ved den almindelige Proportionslære i V. givne Lejlighed til Almindeliggørelse af de opstillede geometriske Sætninger.

Et Exempel herpaa er Almindeliggørelsen af den pythagoreiske Læresætning i VI, 31., hvor Kvadraterne paa Siderne i en retvinklet Trekant ombyttes med ligedannede Figurer paa disse Sider. Naar PROKLOS (S. 426,12) udtaler sin særlige Beundring af denne Sætning, kan jeg i visse Maader tiltræde denne Beundring. Det er dog ikke, fordi den paa det Tidspunkt kunde antages at udvide den geometriske Viden væsentlig. Saaledes sætter allerede HIPPOKRATES med saa stor Frihed ligedannede Afsnit i Stedet for Kvadraterne paa deres Korder, at han sikkert ikke kan have været i nogen Tvivl om Gyldigheden af det i VI, 31. opstillede Theorem; men Opfattelsen af den egentlige pythagoreiske Sætning som et specielt Tilfælde af den udvidede har en stor intellektuel Værdi derved, at man i Overensstemmelse med ARISTOTELLS' Udtryk paa det anførte Sted kan sige, at det i den pythagoreiske Sætning ikke er paa Grund af, at Figurerne paa Siderne i den retvinklede Trekant netop er Kvadrater, men paa Grund af, at de i deres Egenskab af Kvadrater er ligedannede, at Hypotenusens Kvadrat bliver lig Summen af Katheternes.

Der gives imidlertid ogsaa Tilfælde, hvor en saadan Almindeliggørelse nærmest virker forstyrrende, fordi Sætningen netop faar sin Brugbarhed ved at anvendes paa de mere specielle Tilfælde, og hvor Almindeliggørelsen afleder Opmærksomheden fra denne Brugbarhed. Dette er en Anledning til særlig at fremhæve den egentlige pythagoreiske Sætning, og i det af ARISTOTELES nævnte Tilfælde vil det ofte være bekvemmere at bestemme Paralleler som dem, der staar vinkelrette paa en given Linie, end som dem, der danner en anden given Vinkel med en anden. Saaledes har det vel stor intellektuel Interesse, at rette Linier bestemmes paa samme Maade i et skævvinklet Koordinatsystem som i et retvinklet, men naar Koordinatsystemet blot skal optræde som Hjælpemiddel ved geometriske Undersøgelser, vil man dog jævnlig foretrække et retvinklet, som det, der samtidig giver en simplere Bestemmelse af Afstande og Vinkler, samt af Cirkler. Af lignende Grunde kan vi ikke ubetinget prise den almindelige Skikkelse, som EUKLID i VI, 28.—29. har givet de saakaldte Fladeanlæg og i VI, 27. den til det første af disse svarende Mulighedsbetingelse, idet han ombytter Rektangler med Parallelogrammer med en given Vinkel og det manglende eller overskydende Kvadrat med et Parallelogram, hvori tillige Siderne staar i et givet Forhold. Som Forfatter af „Elementer“ med det videnskabelige Formaal at danne Grundlaget for videregaaende Undersøgelser kan EUKLID vel føle en vis Forpligtelse til at gøre sine Sætninger saa almindelige som muligt; desto mere kan der da bygges paa dem. Men paa samme Tid skjuler Almindeliggørelsen af disse Sætninger det algebraiske Formaal, for hvilket de var bestemte, og som paa en simplere Maade opfyldes af de simple Fladeanlæg. Disse falder ganske sammen med den nu brugelige algebraiske Løsning, naar man blot ombytter deres Rektangler og Kvadrater med Produkter og anden Potens, deres Bestemmelse af en Side i en retvinklet Trekant, hvis to andre Sider er givne, med en Kvadratrodsuddragning.

Den pythagoreiske Sætning var allerede i I. Bog fremsat i sin simple Skikkelse, og der havde allerede været rigelig Lejlighed i II.—IV. Bog til at vise de Anvendelser, som man kan gøre af den netop i dens ikke almindeliggjorte Skikkelse. Ligeledes var parabolske Fladeanlæg og et Rektangels Omdannelse til et Kvadrat, eller, som vi nu siger, Løsningerne af Ligningerne $ax = bc$ og $x^2 = ab$ i I. og II. givne i deres algebraisk-geometriske Form, før de i VI, 12. og 13. behandles ved Proportioner. Derimod er Ligningerne $ax - x^2 = bc$ og $\pm ax + x^2 = bc$, hvis geometriske Fremstilling og hvis Løsning er indbefattede i de almindeliggjorte Fladeanlæg VI, 28. og 29., ikke forud opstillede i deres oprindelige simple Skikkelse, om end deres Tilknytning til den geometrisk-algebraiske Behandling tydelig fremgaar af II, 5. og 6.

Det er dog udelukkende i denne simplere Skikkelse, at EUKLID virkelig anvender Fladeanlægene, hvad han gør i rigt Maal i X. Bog. Foruden Afslutningen af THEAITET's Undersøgelse af Rodstørrelsers Irrationatitet indeholder denne en Klassifikation af de Størrelser, som er irrationale ved Kvadratrod. Udtalt saaledes falder denne Inddeling delvis i Øjnene ved Brug af det moderne Kvadratrodstegn, men ogsaa kun delvis, idet Udtryk af visse Former kan reduceres til andre, navnlig ved at hæve dobbelt Irrationalitet. EUKLID, der omhyggelig medtager saadanne Reduktioner, danner de samme Størrelser ved Løsning eller sukcessive Løsninger af Ligninger af 2. Grad. Det er disse, der ved at gøres til Fladeanlæg opstilles som Ligninger af 1. Grad mellem Rektangler og Kvadrater, og efter Sætningerne om Fladeanlæg føres tilbage til Angivelse af en Konstruktion; men at Spørgsmaalet er om de fremkomne Størrelsers Kommensurabilitet med givne Størrelser eller indbyrdes, viser, at der ogsaa tænkes paa Anvendelsen paa numeriske Ligninger.

Under disse Omstændigheder er det, at X. Bog kommer til at indeholde saa mange Fladeanlæg, nemlig i 17, 18, 54, 55, 91—101. Idet Undersøgelsen i sig selv er algebraisk, maa Euklid her ogsaa paa anden Maade foretage algebraiske Omdannelser, som man nu vilde foretage ved Algebraens nuværende Symboler, men som Euklid maa fremstille ved den geometriske Algebras Rektangler og Kvadrater. Som omtalt i VII. Kapitel har Euklid vel i II. Bog fremsat og bevist nogle af de Sætninger, der ligger til Grund herfor, navnlig Konstruktionen af en Gnomon, og dertil føjet nogle geometriske Anvendelser som han har øjeblikkelig Brug for; men disse Sætninger giver ikke en direkte Fremstilling af Methoden. Naar Euklid vil bruge den i sin synthetiske Fremstilling, og naar det, han vil bruge, ikke allerede indeholdes i Sætningerne i II. Bog, maa han give det Form af Hjælpesætninger, om det end beror paa en nok saa simpel Anvendelse af Methoden. Af saadanne Hjælpesætninger træffer vi derfor flere i X. Bog, saaledes til Bevis for Sætningerne 17, 22, 29, 33, 54, 60.

Den geometriske Algebra viser sig saaledes at være en Methode, som Euklid har til Raadighed, hver Gang han har Brug for den. Da beviser han i sin sædvanlige synthetiske Form de af dens Sætninger, som han skal bruge og ikke tidligere har bevist; men et saadant Overblik over disse Sætninger, som særlig vilde vejlede ved Anvendelse af Methoden, giver han derimod intetsteds. Det vigtigste før hans Tid vundne Udbytte af denne, nemlig Løsningen af Ligninger af 2. Grad i Form af Fladeanlæg, har det vel hørt med til hans Formaal at bevise ogsaa for dets egen Skyld. Dette viser sig ikke mindst ved hans Bestræbelse for at give det en saa almindelig Form som muligt; men trods hans flittige Brug af de deri indbefattede simple Fladeanlæg finder han det ikke engang fornødent at opstille disse som Korollarer til de almindelige, som han dog ikke bruger i den almindelige Form. Alt dette tyder paa, at Euklid ikke blot selv har haft, men ogsaa hos sine Lærlinge har turdet forudsætte en større Færdighed i Anvendelse af den geometriske Fremstilling af Algebraen, end nu Læsere af Euklid, der mener hos ham selv at skulle finde Omfanget af hans Hjælpemidler direkte paapeget, ofte antager. Under disse Omstændigheder vil Rækkevidden af hans algebraiske Hjælpemidler yderligere være forøget ved den almindelige Behandling af Proportioner, der tillader en Fremstilling af Produkter med et hvilketsomhelst Antal Faktorer ved Hjælp af sammensatte Forhold. De almindeliggjorte Fladeanlæg i VI. Bog, hvilke Euklid dog som sagt ikke selv tager i Brug, vil paa denne Maade fremstille en Ligning af 2. Grad med Koefficient til det kvadratiske Led (se Keglesnitslæren i Oldtiden 1. Afsnit).

Af det her anførte Skrift ses, at det er ved gennemgaaende Brug af den ved

Hjælp af Proportionslæren udvidede geometriske Algebra, at APOLLONIOS har kunnet gennemføre de omfattende Undersøgelser, som hans „Keglesnit" indeholder. Paa dette Sted bør vi imidlertid især fremdrage de Kendetegn paa Færdighed i algebraiske Undersøgelser i geometrisk Form, som allerede EUKLID lægger for Dagen udover, hvad han deraf har faaet Brug for i „Elementerne". Saadanne kan søges i „Data", som jo netop er beregnet paa at lægge den mathematiske Viden til Rette til Brug for de i Analysen indeholdte Reduktioner. Det er netop saadanne Reduktioner af de i opstillede Ligninger udtrykte Fordringer, som vi nu foretager, naar vi løser Ligningerne algebraisk. I de Tilfælde, hvor en antik Undersøgelse har et algebraisk Formaal, vil „Data", blot i geometrisk Form, give Anvisning paa de samme algebraiske Reduktioner, som vi nu udtrykker i det algebraiske Tegnsprog. Ved en umiddelbar Oversættelse af den geometriske Fremstilling ses det saaledes, at Data 84. og 85. udtrykker det samme som, at Løsningen af Ligningerne $xy = a$ $y - x = b$ føres tilbage til Løsning af Ligningen $x^2 + bx = a$ (hyperbolsk Fladeanlæg), Løsningen af Ligningerne $xy = a$, $x + y = b$ til Løsning af Ligningen $bx - x^2 = a$ (elliptisk Fladeanlæg). I 86. rummer den geometriske Form en helt gennemført algebraisk Løsning af Ligningerne

$$xy = a$$
$$y^2 - mx^2 = b.$$

Vi skal nedenfor fremsætte den umiddelbare Oversættelse af Løsningen paa Algebraens nuværende Sprog, idet vi blot bemærker, at de deri forekommende Produkter betegner Parallelogrammer (Rektangler), x^2 og y^2 Kvadrater, og at de Udtryk ved de givne Størrelser, som vi skriver paa højre Side af vore Ligninger, er Gengivelse af, at det siges, at Udtrykkene paa venstre Side er „givne", det vil sige: efterhaanden kan bestemmes, naar a, b og m er givne. Vi skriver da kun de algebraiske Betegnelser for de Operationer, ved hvilke disse sukcessive Bestemmelser, som EUKLID betragter som bekendte, maa foregaa i Henhold til de tidligere Sætninger af Bogen. Anvendelsen af geometrisk Fremstilling spiller her næsten ingen Rolle; den bestaar kun i, at den Hjælpestørrelse, vi her kalder z, afsættes ud ad y, hvorved ogsaa $y - z$ bliver fremstillet som et Liniestykke; saadanne betegner EUKLID helt igennem ved Bogstaver paa Endepunkterne. Operationerne er da de følgende: Man sætter

$$b = yz$$

og, da $b = y^2 - mx^2$ og $xy = a$, faas efterhaanden, idet vi Skridt for Skridt gengiver EUKLID's Slutninger:

$$\frac{y\,(y - z)}{x^2} = m, \quad \frac{x}{z} = \frac{a}{b}, \quad \frac{x^2}{z^2} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{y\,(y - z)} = \frac{1}{m}, \quad \frac{4y\,(y - z)}{z^2} = 4m\,\frac{a^2}{b^2},$$

$$\frac{4y\,(y - z) + z^2}{z^2} = \frac{(2y - z)^2}{z^2} = 4m\,\frac{a^2}{b^2} + 1$$

$$\frac{2y - z}{z} = \sqrt{4m\,\frac{a^2}{b^2} + 1},$$

$$\frac{2y}{z} = \sqrt{4m\frac{a^2}{b^2} + 1} + 1,$$

$$\frac{y}{z} = \frac{yz}{z^2} = \frac{b}{z^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4m\frac{a^2}{b^2} + 1} + 1\right),$$

$$z = \sqrt{\frac{2b}{\sqrt{4m\frac{a^2}{b^2} + 1} + 1}},$$

og da $yz = b$, bliver

$$y = b\sqrt{\frac{\sqrt{4m\frac{a^2}{b^2} + 1} + 1}{2b}}.$$

Alt dette er Algebra, ved hvis Fremstilling i Ord de geometriske Fremstillingsmidler slet ingen Rolle spiller, og geometrisk Anskuelse sættes paa intet Punkt af Euklid's Fremstilling i algebraiske Slutningers Sted. Hver enkelt af de Ligninger, vi har opstillet, er bygget paa en foregaaende Sætning (eller Definition) i Data, til hvilken henvises i Menge's Udgave. Vel er det paa en geometrisk Konstruktion af den Størrelse, som siges at være given, naar de i de foregaaende bestemte Størrelser er det, at der formelt gives Anvisning; men da man af Euklid's X. Bog har sluttet, at Grækerne allerede paa den Tid ogsaa anvendte Fladeanlæg til Løsning af numeriske Ligninger, og om end rimeligvis med ret grov Tilnærmelse uddrog de derved forekommende Kvadratrødder, kan vi vide, at de ogsaa, naar a, b og m var givne som Tal, forstod at omsætte de her foreskrevne Konstruktioner til successiv Beregning af de Størrelser, som efterhaanden paastaas at være „givne", hvilket maatte ske i fuld Overensstemmelse med de moderne mathematiske Tegn, hvorved vi har udtrykt de foreskrevne Konstruktioner. Euklid siger iøvrigt ikke noget nærmere om, i hvilken Form a, b og m er givne, medens den konstruktive Løsning vilde kræve, at a og b fremstilles som Arealer af givne Figurer, m som Forholdet mellem to Linier.

Den geometriske Form var dog nødvendig for Euklid, der ikke havde vore Betegnelser for almindelige Størrelser og algebraiske Operationer med disse, naar han skulde give en almindelig Løsning af den stillede Opgave. End ikke et numerisk bestemt Exempel vilde han kunne fremstille nøjagtig ved Tal og Angivelsen af Regning med disse, da Roduddragningen kun kunde udføres med Tilnærmelse; og en saadan Fremstilling vilde være ham helt umulig, naar ikke a, b og m er opgivne som rationale Tal. Den algebraiske Sammenhæng mellem de forskellige Operationer er dog ganske den samme, hvad enten de udtrykkes i Euklid's geometriske Sprog eller i den nuværende Algebras, og den algebraiske Færdighed i at benytte disse Forbindelser til at løse forelagte Opgaver lader sig derfor næsten lige godt knytte til den ene eller anden af disse Fremstillingsformer. At det i det foreliggende Tilfælde, naar man har et Udtryk for $\frac{y(y-z)}{z^2}$, vil føre til et fuldstændigt Kvadrat at multiplicere med 4 og lægge 1 til, er f. Ex. et Kunstgreb, som EUKLID har haft paa rede Haand uden at behøve at tegne en Gnomonfigur, ligesom den, der nu kan Formlen for et Kvadrat af et Binom udenad. Allerede ved Indførelsen af den nye ubekendte z har EUKLID tilmed haft Dannelsen af et med en „given" Størrelse ligestort Kvadrat for Øje. En saadan algebraisk Indførelse af en ubekendt Hjælpestørrelse, hvoraf DIOFANT 600 Aar senere gør saa heldige Anvendelser, var altsaa lige saa lidt noget ukendt paa EUKLID's Tid som algebraiske og numeriske Anvendelser af Ligninger af anden Grad. Det er blot bleven mere skjult for Læsere i den nyere Tid derved, at EUKLID selv overalt lægger Hovedvægten paa den Forbindelse med exakt bestemte geometriske Konstruktioner, som han i Tilslutning til PLATON's Disciple havde sat sig til særlig Opgave at behandle. Manglen af Fremhæven af den rent algebraiske Side af Sagen tyder, som alt fremhævet, snarere paa, at heri ikke dengang laa noget nyt. Det kunde dog ikke undgaas, at ogsaa selve Algebraen gik frem ved den Brug, EUKLID gør af den f. Ex. til at løse den her omtalte Opgave i Data 86, og ved de mangfoldige Anvendelser af Algebraen, som f. Ex. APOLLONIOS gjorde saavel i sine Smaaskrifter som i Keglesnitslæren, hvor de meddeles under samme geometriske Former som hos EUKLID. DIOFANT's algebraiske Opgaver viser, at denne Beskæftigelse med Algebraen er fortsat gennem de mange mellemliggende Aarhundreder og vel nok videre udviklet under Anvendelsen paa flere og forskellige numeriske Opgaver.

Det er som sagt den geometriske Form, der her som andetsteds giver de algebraiske Operationer den for selve disse ønskelige Almindelighed; men Formaalet for EUKLID's Data er ikke at give en Øvelse i disse. I Overensstemmelse med vore Bemærkninger S. 32 (230) skal de ved Siden af Elementerne som Grundlag give Midler til videregaaende Undersøgelser, og dette har i EUKLID's Øjne ogsaa her krævet den forøvrigt let købte højere Grad af Almindelighed, som i de anførte Sætninger 84.—86. faas ved at ombytte Rektangler og Kvadrater med Parallelogrammer og Rhomber med en given Vinkel.

For denne Almindeliggørelse særlig af 86. kan EUKLID iøvrigt have haft en Anvendelse i de videregaaende Undersøgelser, som beskæftigede ham selv under hans Behandling af Læren om Keglesnit. Hvad hans tabte Keglesnitselementer indeholdt, antages jo nærmest at være det, som ARCHIMEDES forudsætter bekendt. Dertil hører den Sætning, som man i Nutiden ofte har kaldt „Apollonios' Sætning", og som anvendt paa en Hyperbel i mere geometrisk Form udtrykker det samme som denne Kurves Fremstilling ved den i Data 86. behandlede Ligning $y^2 - mx^2 = b$, naar den henføres til et Par konjugerede Diametre. Ligningen $xy = a$ for en ligesidet Hyperbel henført til sine Asymptoter var kendt af MENAICHMOS. Med EUKLID's Lyst til Almindeliggørelse ligger det ikke fjernt at antage, at han, som senere APOLLONIOS, kendte den samme Lignings Anvendelse til at henføre en vilkaarlig Hyperbel til sine Asymptoter. I saa Fald har EUKLID vidst, at den i Data 86. behandlede Opgave faldt sammen med den at bestemme Skæringspunkterne mellem to Hyperbler, af hvilke den ene har et Par givne konjugerede Diametre, den anden de samme Linier til Asymptoter.

Kap. XIII.

Idealiteten af de geometriske Figurer.

I VI. Bog af „Staten" fremhæver Platon, som vi allerede har set S. 13 (211), at Geometerne bruger synlige Figurer og knytter deres Slutninger til dem, skønt det ikke er dem, de har i Tankerne, men hine, med hvilke de har Lighed. Er Talen saaledes om et Kvadrat og dets Diagonal, gælder deres Beviser ikke dem, som de tegner, men selve Kvadratet og selve Diagonalen o. s. v. Platon kan med fuld Ret fremhæve dette som noget, der allerede finder Sted; ja det har fundet Sted i den allerældste Geometri; men hans Udtalelse maatte paavise Nødvendigheden af i en paa et rationelt Grundlag bygget Geometri ved klare og utvetydige Definitioner at slaa de Begreber fast, hvorom Undersøgelsen virkelig drejer sig, og som de tegnede Figurer kun skal tjene til at fastholde i Forestillingen. Selv uden en udtrykkelig Opstilling i Ord af disse Begreber er det dog dem, man i Intuitionen fra først af har haft for Øje, paa samme Tid som man, som Platon siger, knyttede sine Slutninger til de tegnede Figurer. Det var i Virkeligheden kun i deres Anvendelse paa de i en Intuition fastholdte ideale Figurer, at disse Slutninger og de deraf fremgaaede Resultater var rigtige.

Denne Evne til intuitiv Abstraktion fra en tegnet Figurs rent tilfældige Enkeltheder og til gennem den at tilegne sig Billedet af en langt simplere Figur, som ikke er beheftet med alle disse forstyrrende Enkeltheder, er en oprindelig psykologisk Evne hos Mennesket, uden hvilken det vilde have været det umuligt at bringe nogen Sammenhæng i al Sansningens Virvar. Det er en Abstraktionsevne, som paa det nøjeste hænger sammen med Manglen af en anden Evne: Differentieringsevnen. Man ser det fælles, almindelige og derved simple i Fænomener, som dog i mindre Ting er ret forskellige, netop fordi man er for uudviklet til at gøre sig Rede for disses Forskelligheder. Hermed hænger den barnlige Fantasi ogsaa sammen; man kan faa et Barn, og vistnok ogsaa voxne paa et barnligt Kulturtrin, til i en løst udkastet Stregfigur at se, hvad man fortæller dem om. I et Omrids med noget, der skal betegne Hoved, Hale og fire Ben kan man faa det til at se en Hest, Ko, Hund eller Kat[1]), ja Afbildningen af et enkelt bestemt af disse Dyr.

[1]) I en Samtale om denne primitive Abstraktionsevne henviste Jul. Lange en Gang til Poul Møller's „Lægdsgaarden i Ølsebymagle", hvor Billedkunsten repræsenteres ved en saadan Tegning af et „firfodet Dyr".

Hertil har vi alt henvist i VI. Kap., hvor det omtaltes, at man behandlede plane Figurer og rette Linier, længe før man var i Stand til i Ord at give et fuldkomment Udtryk for, hvad en Plan eller en ret Linie er, ja før man tænkte paa, at dette kunde være ønskeligt eller nødvendigt. For Planers Vedkommende gjorde man sig maaske knap Rede for, at de anstillede Betragtninger kun gælder om Figurer, der ligger i en saadan, eller man opdagede først dette, naar der gjordes Forsøg paa at anvende dem paa Figurer, der i iøjnefaldende Grad ikke laa i en Plan. Til at bemærke saadanne Afvigelser, hvad man sikkert tidlig kunde, hørte dog en ret tydelig Forestilling om en ideal Plan, og hvor fuldstændig den umiddelbare Tilegnelse af denne og andre ideale geometriske Forestillinger har været, før man har opstillet Definitioner, fremgaar af, at disse sidste prøves efter, hvor godt de stemmer med det forud intuitivt tilegnede Billede. Er man uenig om, hvorvidt en Definition er god og fyldestgørende, forudsætter de, der forhandler derom, dog fuld Overensstemmelse om, hvad det er, man vil definere. Denne Overensstemmelse gælder ogsaa Spørgsmaalet om, hvad der virkelig menes med en tegnet Figur.

Af denne Grund har vi i de Sammenligninger, vi hidtil har anstillet mellem den ældre Geometri og den fra Platon's Tid paabegyndte helt rationelle Behandling, rolig kunnet gaa ud fra, at Talen er om ganske de samme ideale Figurer, baade da man ikke endnu gav deres ideale Egenskaber Udtryk i Ord, og da man senere definerede dem og lagde Definitioner og Axiomer til Grund for et synthetisk opbygget System. Disse Definitioner er jo, som forklaret i Kap. IV, netop dannede ved en Analyse af de Sætninger, man forud kendte, og om hvis Rigtighed man allerede forud var overtydet. Denne Analyse maatte føres tilbage til de Grundegenskaber, man stiltiende, uden at gøre sig Rede derfor, maatte have tillagt Figurernes enkelte Dele, naar de deraf dannede Figurer virkelig skulde have de Egenskaber, som Sætningerne tillægger dem. De Egenskaber, som Geometerne af den platonisk-euklidiske Skole ad denne analytiske Vej maatte bringes til at udtale i deres Definitioner og Postulater, viser sig iøvrigt at være ganske de samme, som det ogsaa efter Dr. Rubin's Undersøgelser om Synsoplevelser maatte falde naturligt at forudsætte, ogsaa før man tænkte paa i Ord at udtale dem, en Omstændighed, der i Virkeligheden har sparet Reformatorerne en stor Del af Arbejdet ved den her omtalte Analyse.

Som Exempel herpaa kan vi nævne Begrebet: Linie uden Tykkelse eller, som vi vil sige her, hvor vi væsentlig beskæftiger os med plane Figurer, uden Bredde, og det dermed forbundne: Punkt uden Udstrækning. Som vi har set i Tilslutning til Rubin, er det fra først af Fladefigurer, der er Genstand for Synsoplevelser. Linierne træder først frem som Dele af Fladefigurers Begrænsning. Optræder en Linie som Grænse mellem to Fladefigurer, der kan skelnes ved forskellige Farver, bliver der slet ikke Anledning til at tillægge den nogen Bredde. Den oprindelige Opmærksomhed for Fladefiguren er endog saa stærk, at man bringes til netop at tænke paa den, naar dens Omrids gengives ved Streger. Saalænge man kun tænker paa disse som Fladefigurens Begrænsning, tænker man ikke paa at tillægge dem nogen Bredde. Og har de en saa stor Bredde, at man ikke kan undlade at tage den i Betragtning, vil man straks spørge, om Fladefiguren skal regnes til Stregens ydre eller indre Rand, altsaa virkelig til en Linie uden Bredde, nemlig Grænsen mellem den ved Stregens Bredde opstaaende Stregfladefigur og Tegnepapirets Grund. Vælger man f. Ex. Midterlinien mellem Stregens Grænselinier, bliver den ogsaa en Linie uden Bredde. At de Operationer, som man allerede finder omtalt i Çulbasūtraerne, i Virkeligheden kun gælder, naar man tænker sig Grænselinierne som Linier uden Bredde, overbeviser man sig let om. Den der beskrevne Omdannelse af et Rektangel til et Kvadrat gælder saaledes kun, naar begge Figurer er omgivne af mathematiske rette Linier. Naar dette ikke er Tilfældet, men Figurerne er omgivne af en Rand, der for begge har samme Bredde, kan man ikke se saaledes bort fra denne, at man f. Ex. siger, at naar Omdannelsen gælder for de indre Omkredse, maa den samme gælde for de ydre Omkredse. Nej, den Tillid, som man med Rette havde til Omdannelsens Rigtighed, kan kun have været knyttet til Opfattelsen af Grundlinierne som Linier uden Bredde. Denne Opfattelse har ved denne og mange andre geometriske Operationer været en Forudsætning, hvormed ogsaa Grækerne regnede, længe før de slog den fast i en udtrykkelig Definition. Paa lignende Maade faar Punktet som Grænse for en begrænset Linie eller som Skæringspunkt mellem to Linier ingen Udstrækning[1]).

Det er saaledes i fuld Overensstemmelse med, hvad den ældre Geometri faktisk havde forudsat, at man, da man ved en Analyse af denne vilde gaa tilbage til dens mest elementære Forudsætninger for dernæst at tage dem til første Udgangspunkter for en synthetisk Opførelse af et rationelt System, maatte ende denne Analyse med at betragte Linierne som Grænser for Fladefigurer, der som saadanne ingen Bredde havde, men kun Udstrækning i Længde, og paa lignende Maade for Punkter som Grænser for Linier og Flader som Grænser for Legemer. Netop denne Analyse giver sig Udtryk i Euklid's første Definitioner, men i den omvendte Orden, som baade det hele og Enkelthederne skal antage, naar Udbyttet af en Analyse omsættes til Synthese.

I Definition 1. hedder det: Et Punkt er det, som ikke kan deles; i 2.: En Linie er en Længde uden Bredde; i 3.: En Linies Grænser er Punkter; i 5.: En Flade er det, som kun har Længde og Bredde; i 6.: En Flades Grænser er Linier. I XI. Bog suppleres de med 1.: Et Rum er det, som har Længde, Bredde og Dybde; 2.: Et Rums Grænse er en Flade. Man har ofte i disse Definitioner villet se to

[1]) Det er i denne Sammenhæng mindre væsentligt, at man efter et Forsøg af Rubin S. 180 ogsaa kan synsopleve en som Streg tegnet Linie som Linie uden Bredde. Fjerner man sig nemlig fra den, vil enhver Opfattelse af dens Bredde ophøre før Opfattelsen af, at der overhovedet er en Linie. Det samme er iøvrigt vel bekendt fra Astronomien for Punkters Vedkommende. Idet vi kan se Fixstjernerne og angive deres Plads, men ikke kan opfatte nogen Udstrækning af en Fixstjerne, bliver disse virkelig til Punkter paa Himmelkuglen. Dette er de dog ikke for den umiddelbare Sansning med det blotte Øje eller gennem Kikkert. Manglen paa synlig Udstrækning opdager man nemlig derved, at den tilsyneladende Udstrækning bliver mindre, i jo større Forstørrelse man betragter Himlen. For vor Synsopfattelse fremstiller de sig altsaa altid med en vis Udstrækning.

Rækker Definitioner paa de samme geometriske Grundbegreber, som kunde hidrøre fra forskellige Kilder, og som Euklid af Troskab mod Overleveringen havde ment at burde medtage begge. For en saadan historisk Hypothese bliver der imidlertid ikke Brug, naar man lægger Mærke til, at de ganske nøje antager de Skikkelser, som de maa i en Synthese af de Elementer, som maa fremkomme ved en Analyse af den Geometri, der tidligere gjorde praktisk Brug af de her definerede Begreber. Definitionerne i første Række I, 1., 2. og 5., XI, 1. paa Punkt, Linie, Flade, Rum er de virkelige Definitioner, de, der skal danne Udgangspunkter for en synthetisk Behandling; de er de yderste Grænser, hvortil Analysen kan føre; og de er ordnede efter deres Simpelhed. Ved Analysen maa man være kommet til dem i omvendt Orden. Denne Analyses forskellige Skridt kan man genfinde i den anden Række Definitioner XI, 2., I, 6. og 3.; men i Synthesen maa de fremstilles i omvendt Orden, og deres Plads i Synthesen hævder de ikke som nye Definitioner paa Punkt, Linie og Plan; nej, ogsaa i dem selv bevæger Synthesen sig i modsat Retning af Analysen, saa de nu — ogsaa efter deres Ordlyd — bliver Definitioner paa Grænser for Linier, Flader og Legemer, og derved forklares, hvad begrænsede Linier, Flader og Legemer er. Ogsaa disse Begreber, fra hvis Existens Analysen er gaaet ud, og som i Virkeligheden er Genstande for mere umiddelbare Sanseoplevelser, maa nu indføres ved udtrykkelige Definitioner. Som svarende til sidste Led i den geometriske Analyse, der har ført til de virkelige Definitioner paa Grundbegreberne, maa de i Synthesen hver for sig komme efter den tilsvarende Definition.

Som man ser, udsiger de anførte Definitioner paa rette Plads netop, hvad der skal siges for at have de rette Udgangspunkter for de følgende Undersøgelser, uden at give nærmere Forklaring eller anstille yderligere Betragtninger; men saadanne har ganske sikkert baade gaaet forud, ledsaget og fulgt efter Opstillingen af Definitionerne; dertil maatte Uvirkeligheden af Begreberne: geometriske Figurdele uden Udstrækning i den ene, den anden eller alle Retninger indbyde. Hvad vi i den Henseende træffer saa langt tilbage som hos Pythagoreerne og Zenon[1]), vedrører nærmest Spørgsmaalet om Tilladeligheden af infinitesimale Grænseovergange, for hvilke først langt senere Eudoxos fandt en exakt Form. Naar saaledes Pythagoreerne definerer et Punkt som: Enhed med Beliggenhed, staar dette i Modsætning til de euklidiske Definitioner, der udelukkende giver Punktets Beliggenhed. Ordet Enhed peger derimod hen paa en Bestræbelse efter at udtrykke Liniers Længder ved Tal, der ganske vist maa være uendelig store, naar Linierne er inkommensurable, men hvis Forhold man ved en intuitiv Grænseovergang har ment at kunne behandle. En Linie skulde da bestaa af uendelig mange Punkter. Herimod indvender Zenon med Rette, at hvis Punktet ingen Udstrækning har, faar man kun et Punkt, hvor tidt man end gentager det, og hvis det har en nok saa lille Udstrækning, vil en uendelig Gentagelse give en uendelig Linie. Allerede her træder

[1]) Herom henvises til P. Tannery's Omtale af Zenon i „*Pour l'histoire de la science helène*". Paris 1887.

en abstrakt Opfattelse af et Punkt som værende uden Udstrækning os tydelig imøde, selv om Pythagoreerne søgte at ombytte Manglen paa Udstrækning med en uendelig lille Udstrækning. At Mathematikerne ogsaa før PLATON gjorde de ideale Forestillinger gældende, ser vi, naar Sofisten PROTAGORAS netop bebrejder Mathematikerne, at de gør dette og f. Ex. paastaar, at en Tangent til en Cirkel kun har et Punkt fælles med denne.

Paa den anden Side finder man ogsaa Bestræbelser for at bringe Overensstemmelse mellem de ideale, definitionsmæssige Bestemmelser af de geometriske Former og deres Optræden i Virkeligheden, og selv om saadanne først foreligger fra den eftereuklidiske Tid, kan lignende Betragtninger næppe have været fremmede for dem, der slog de ideale Opfattelser fast i Definitioner. Naar disses Uoverensstemmelse med den erfaringsmæssige Virkelighed vakte saadanne Modsigelser som fra PROTOGORAS, maatte der nemlig ogsaa fremkomme forklarende Forsvar. I et af PROKLOS (S. 100, 6-19) anført Sted af et tabt Skrift af APOLLONIOS[1]) gør denne gældende, at naar man taler om Længden af en Vej eller af en Mur, opfatter man denne for saa vidt kun som en Linie med en Dimension. Mindre slaaende synes det at være, naar samme Sted en Slagskygges Begrænsning nævnes som Exempel paa en mathematisk Linie; thi naar Lysgiveren ikke allerede er et mathematisk Punkt, naar den f. Ex. er Solen, vil Overgangen mellem Lys og Skygge finde Sted i en Stribe af endelig Bredde. I hvert Tilfælde har dette Exempel ikke indeholdt nogen Tanke, som kunde være fremmed for dem, der foretog den Analyse, som ligger bagved EUKLID's Definition I, 6. Iøvrigt kan det ikke med Bestemthed ses af PROKLOS' Citat, om ogsaa det fra Slagskyggens Begrænsning hentede Exempel skyldes APOLLONIOS. Denne har dog netop haft Lejlighed til at betragte Keglesnitslinierne som Grænselinier for Slagskyggen af en Cirkel eller en Kugle. Dette har han kunnet, naar han betragtede Lysgiveren som et Punkt, hvad han kunde med samme Ret, som han — i passende Sammenhæng — betragtede en Vej eller en Mur som en Linie. Det hele Citat viser, at APOLLONIOS har fremhævet Berettigelsen til — naar det sker i rette Sammenhæng — at „betragte“ empiriske Punkter, Linier og Flader som mathematiske, altsaa til at anvende Geometriens idealiserende Abstraktioner paa Virkeligheden. Ved denne Forklaring af de gængse Abstraktioner er han langt fra at sætte sig i Modsætning til disse.

[1]) P. TANNERY har (Bulletin des Sciences mathématiques, 2 série, t. V. (1881) S. 124—136; Mémoires scientifiques I, S. 124—138) ved Sammenstilling af de Uddrag af dette Skrift, som forefindes, og nogle beslægtede Uddrag af unævnte Forfattere forsøgt at give en Forestilling om, hvad dette Skrift kan have indeholdt.

Kap. XIV.

Stereometrien.

I de foregaaende Undersøgelser over Geometriens Omdannelse fra en delvis intuitiv Viden til en rationel Videnskab har vi kun nu og da taget Hensyn til Stereometrien, hvor den foreliggende Sammenhæng gjorde det ønskeligt ogsaa at medtage stereometriske Anvendelser af de omtalte Principer. At de Principer, som fulgtes ved den virkelig gennemførte Omdannelse, i det mindste fra først af var knyttede til Plangeometrien og først ved en Udvidelse ligeledes blev gjort anvendelige paa Stereometrien, ses af Platon's i III. Kap. omtalte Klager over Forsømmelse af Stereometrien. Den synthetiske Opførelse af den nye geometriske Lærebygning maatte iøvrigt gaa nedenfra opad fra Punkt, Linie til Flade, særlig Planen med Figurerne i denne, og først derefter komme til Rummet med Legemer og andre rumlige Figurer. Læren herom begynder Euklid først i XI. Bog med at opstille Definitionerne XI, 1. og 2., som vi alt har omtalt. Men vi omtalte da ogsaa, at forud for de øvrige synthetisk formede Definitioner og dermed for hele den foregaaende Geometri maatte være gaaet den i Def. XI, 2. omdannede Analyse, ved hvilken Begrebet Flade som Grænse for Legeme først er opstaaet.

At saaledes Opfattelsen af Legemer gaar forud for Opfattelsen af Flader, stemmer med den intuitive Begrebsdannelse, som har fundet Sted i Geometrien. Og det staar ikke i Strid med det historiske Faktum, at virkelige geometriske Undersøgelser først er knyttede til Geometri paa Flader, særlig Planen, for Astronomiens Vedkommende ogsaa Kuglen. Ganske som vi har set, at geometriske Undersøgelser af Fladefigurer hurtig tog Skikkelse af Undersøgelser af deres Begrænsning, var det først gennem Fladeundersøgelse, at man fik virkelig Besked om Rumfigurer. At man dog, ja, at vi endnu vedbliver at knytte det, som vi kan erkende om Overfladen, til Legemet, ses, naar vi kalder Farven af et Legemes Overflade Legemets Farve, og tillægger Legemet den Form, som dog først erkendes gennem Overfladens Form. Selv Mathematikere gør sig ingen Skrupler af at tale om Kuglens Ligning, naar de mener Kuglefladens Ligning, og at bruge Betegnelserne Kegle og Kegleflade noget i Flæng; Sammenhængen vil vise, hvorom Talen er i hvert enkelt Tilfælde.

Saaledes er der ikke noget langt Spring mellem de geometriske Undersøgelser af Legemer og Flader, og, som vi har set, kom man snart særlig ind paa Undersøgelsen af plane Figurer; men de intuitive Forestillinger, som laa til Grund for disse Undersøgelser, var i høj Grad knyttede til Legemer og rumlige Forhold. De „Flytningsinvarianter", som man straks gav sig i Lag med, skyldte man Kendskabet til saadanne fysiske Legemer, som kan flyttes fra et Sted til et andet uden nogen Forandring af Figurdelenes indbyrdes Forbindelse. Det var netop ved disse Invarianter: Afstande, Vinkler o. s. v., at man udtrykte denne uforanderlige Forbindelse.

Som vi har set, foretoges de ældste geometriske Undersøgelser saavel hos Inderne som hos Grækerne ved Omlægning af uforanderlige plane Figurer; men dels var Fladerne knyttede til Legemer eller endog helt ombyttede med tynde Plader, dels kunde kun nogle Omflytninger foretages i selve Planen, medens det for andre var nødvendigt at tage Figurerne ud i Rummet og lægge dem omvendt ned i Planen igen. Dette turde være en af Grundene til, at MENAICHMOS og EUKLID, der jo netop i Tilslutning til PLATON's Ordning i VII. Bog af Staten vilde opføre Plangeometrien forud for og uafhængig af Stereometrien, saa ivrig stræbte at undgaa saadanne Omlægninger (se VIII. Kap.).

Den intuitive Tilegnelse knytter sig saaledes endog mere umiddelbart til Rumopfattelsen end til de mere abstrakte plane Figurer. Heraf gjorde man Brug, før den theoretiske Udvikling, som Geometrien efterhaanden fik, stillede ret mange Midler til Raadighed. Hertil var Babylonierne henvist ved Sammenligninger f. Ex. mellem Stjerners Opstaaen og mellem en Stjernes samtidige Ændringer af Rektascension og Azimuth. Hertil var ogsaa de ældste græske Astronomer henviste, om end Projektioner paa indbyrdes vinkelrette Planer, i det mindste ved Konstruktion af Solure, tidlig tillod dem ogsaa at gøre Brug af plangeometriske Operationer. Af den delvis intuitive Rumbetragtning gjorde sikkert endnu EUDOXOS og hans Elever Brug under den betydelige Udvikling, som de paa PLATON's Tid gav den til Astronomien knyttede Sfærik[1]). Som Exempel paa en til de astronomiske Bestemmelser knyttet stereometrisk Sætning kan vi nævne den, at Storcirkler, der danner samme Vinkel med en fast Storcirkel, berører en med denne parallel Lillecirkel. Denne Sætning, der iøvrigt kan anføres som et tidlig forekommende Exempel paa Indhyllingskurver, møder os i Forbindelse med saadanne astronomiske Sætninger, hvor Tiden spiller en Rolle. Det er saadanne Sammenblandinger, som PLATON vil have undgaaet, naar han i VII. Bog af Staten efter at have begyndt at tale om Astronomien synes at komme i Tanker om, at der forud for en rationel Behandling af astronomiske Undersøgelser maa gaa saadanne, hvor man vel er gaaet over til 3 Dimensioner, men ikke endnu tager Tid og Samtidighed med i Betragtning. Og i denne Stereometri skal tillige den større eller mindre Brug af Intuition ombyttes med ræsonnerende Begrundelser, der da helst maa have til Udgangspunkt ligesaa videnskabelig anlagte Elementer som dem, man var ifærd med at lægge til Grund for plangeometriske Undersøgelser.

Ønsket om saadanne stereometriske Elementer maatte tillige støttes ved at se hen til det Kendskab, man allerede havde til de regulære Polyedre. Af disse kendte Pythagoreerne i det mindste de tre, som er begrænsede af Trekanter, samt Terningen, medens Betydningen af det Sted, hvoraf man har sluttet, at de ogsaa kendte det

---

[1]) Over den græske Sfærik, ogsaa over dens ældre Former, faar man det bedste og vistnok paalideligste Overblik i vor afdøde Landsmand A. A. BJORNBO: *Studien über Menelaos' Sphärik.* Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. (Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften 14, VII 1902).

femte, Dodekaedret, anses for tvivlsomt[1]). Nogen saglig Grund til Tvivl, eller til at lægge synderlig Vægt paa denne mulige Mangel, er der dog ikke; thi Omtalen af de øvrige Polyedre viser, at man allerede var opmærksom paa det Hovedkrav, der stilledes, at Hjørnerne maa begrænses af Vinkler i kongruente regulære Polyedre, hvis Sum er mindre end 4 rette, og da blev Medtagelsen af det af regulære Femkanter begrænsede Dodekaeder i hvert Fald kun et Tidsspørgsmaal. Det Spørgsmaal, i hvilke Arter kongruente Polygoner man kan dele Planen, hænger nøje sammen dermed og er behandlet af Pythagoreerne (Proklos S. 305,3). Derfor behøver Pythagoreerne ikke at have bevist den til Grund liggende Sætning om Summen af Siderne i et konvext Hjørne i samme Almindelighed og paa samme Maade, som det sker hos Euklid i XI, 21., der igen er bygget paa Sætning XI, 20., som udsiger, at Summen af to Sider i et tresidet Hjørne er større end den tredie. I Beviset for denne Sætning benytter Euklid Sætninger af den Del af I. Bog, om hvis Indhold vi i VIII. Kap. har set, at det i væsentlig Grad skyldes Euklid's (og Menaichmos') Bearbejdelse, navnlig den, at i to Trekanter ABC og $A_1B_1C_1$, hvor Siderne $b = b_1$ og $c = c_1$, vil $A \gtreqless A_1$ medføre $a \gtreqless a_1$. For at finde de regulære Polyedre var det derimod nok at vide, at Summen af Siderne i et regulært Hjørne er mindre end 4 rette, og i dette specielle Tilfælde fremgaar Sætningen let ved at betragte en retstaaende regulær Pyramide. Ved Udarbejdelsen af virkelige „Elementer“ af Stereometrien fik man derimod det nødvendige Grundlag for Læren om regulære Polyedre i den almindeligere og videnskabelige Form, hvori det gives hos Euklid.

Samtidig gav Euklid's Elementer, særlig den deri indeholdte Behandling af Spørgsmaal, der afhænger af Ligninger af anden Grad, samt X. Bogs Klassificering af irrationale Størrelser, Grundlaget for de videregaaende Undersøgelser, som vistnok Theaitet havde begyndt, og som indeholder Bestemmelsen af Kanterne i et regulært Polyeder, naar den omskrevne Kugles Diameter eller Radius er given. Bestemmelserne foreligger vel i Form af Konstruktionsregler; men som overalt i den geometriske Algebra giver disse en lignende Anvisning ogsaa paa praktisk Beregning, som vi nu har i de algebraiske Formler. Denne Undersøgelse findes i Euklid's XIII. og sidste Bog og kunde for saa vidt gerne opfattes som en videregaaende Anvendelse af de i de foregaaende Bøger fremsatte Elementer; men paa den anden Side udgør dens Indhold selv „Elementer“ for de endnu videregaaende Undersøgelser over de samme Polyedre af Apollonios og dernæst for dem af Hypsikles, som man paa Grund af denne Tilslutning har betragtet som en XIV. Bog af Elementerne. — For Sfærikens Vedkommende indeholder Euklid's Elementer intet udover, hvad han selv bruger i Beviset for Kuglers Proportionalitet med Diametrenes Kuber; men de yder de stereometriske Elementer, som giver ogsaa de sfæriske Undersøgelser et videnskabeligt Grundlag. Først senere sammenstiller Menelaos i den første Bog af sin Sfærik virkelige Elementer for Sfæriken, idet han om de af ham indførte sfæriske Trekanter opstiller og beviser en Række Sætninger,

[1]) Se Diels: *Vorsokratiker* (3. Udgave 1912) I S. 314,12. [Se dog Tillæg om E. Sachs' nye Arbejde].

der svarer til Euklid's om plane Trekanter; men ogsaa for disse ligger de af Euklid i XI. Bog opstillede Elementer af Stereometrien til Grund.

Disse Elementer har saaledes for Stereometriens Vedkommende samme Formaal som for Plangeometrien de tidligere af Euklid's Bøger og særlig første Bog, men er svagere og mindre gennemførte i den Maade, hvorpaa dette Formaal realiseres. Herved tænker jeg ikke paa, at visse Definitioner ikke tilfredsstiller de Fordringer, som man nu stiller til en genetisk Definition, der hverken maa sige mere eller mindre, end der er nødvendigt for at tilvejebringe Figuren. Disse er ikke opfyldte, naar f. Ex. et Prisme siges at være den Rumfigur, der begrænses af to modstaaende kongruente (ligestore og ligedannede) plane Figurer og ellers af Parallelogrammer; Tilvejebringelsen og dermed Beviset for Existensen henviser Euklid nemlig her som andetsteds til Sætninger eller Postulater. Andre Definitioner eller Mangler paa Definitioner giver, som vi snart skal se, Anledning til alvorligere Anker. Hvad man endvidere savner, er noget, som svarer til I. Bogs Postulater; ja, Euklid gør i XI. Bog end ikke fuldt ud den Brug af Postulaterne i I. Bog, som netop vilde komme Begyndelsen af Stereometrien til Gode. I I. Bog udtaler Postulaterne, særlig 1., 2. og 5., nemlig de Egenskaber ved Planens rette Linier, hvortil den geometriske Undersøgelse knyttes; men netop ved at Talen er om Linier i samme Plan, uden hvilket Post. 5. endog er meningsløst, bliver det ogsaa virkelige geometriske Egenskaber ved Planen, som de udtrykker, medens den ved Ordene ἐξ ἴσου udtrykte Definition (I, 7.) som den tilsvarende Definition paa en ret Linie kun peger hen paa, at der gives Flader, som man kan kalde plane. Naar det nævnte og i Virkeligheden allerede i I. Bog underforstaaede Synspunkt fastholdes, vil I. Post. 1. og 2. overflødiggøre XI. Sætning 1., som udsiger, at en ret Linie, der delvis ligger i en Plan, helt maa ligge deri, og samtidig give simple Begrundelser af XI., 2. og 3., som udsiger, at to rette Linier, der skærer hinanden i et Punkt, ligger i en Plan, og at to Planers Skæringslinie er ret. Euklid's Bevis for Sætning XI, 1. er derimod ligefrem bygget paa XI, 2., idet der antages tegnet en Cirkel i en Plan gennem to rette Linier, som skærer hinanden, og denne Plans Existens bevises ved 2. Omvendt benyttes Sætning 1. i Beviset for 2., saa der foreligger et virkeligt Cirkelbevis. Selv om Euklid kunde være kommen ud over disse Sætninger ved en Henvisning til Plangeometriens Postulater, er dog som bekendt endnu et Postulat nødigt for fuldt ud at karakterisere Planer, nemlig at to Planer ikke kan have et Punkt fælles uden at have flere (der ifølge de plangeometriske Postulater da maa ligge paa en ret Linie); men dette medtager Euklid ikke.

I øvrigt benyttes som i Plangeometrien Konstruktioner til Beviser for Existensen af de beskrevne Figurer. Ved Hjælp af den i XI, 1.—3. beviste Bestemmelse af en Plan ved at skulle gaa gennem to hinanden skærende rette Linier bygges disse Konstruktioner paa de i Plangeometrien opstillede Postulater. Den Omstændighed, at de ikke skal udføres praktisk, men blot deres Mulighed godtgøres, stemmer ganske med Opfattelsen af Euklid's geometriske Konstruktioner som Existensbeviser. Tilstrækkeligheden af de forud i 20. og 21. opstillede nødvendige Betingelser for

Siderne i et tresidet Hjørne, at Summen af hvilkesomhelst to af disse er større end den tredie, og at de tilsammen er mindre end fire rette, godtgøres saaledes i 23. ved Konstruktionen af et Hjørne med Sider, der tilfredsstiller disse Betingelser. Læren om Bestemmelsen af tresidede Hjørner ved givne Sider og Vinkler udvikles dog ikke med den samme Fuldstændighed som den tilsvarende Lære om plane Trekanter i I. Bog. Denne Mangel har MENELAOS først senere udfyldt ved den nys omtalte tilsvarende Lære om sfæriske Trekanter.

Det er iøvrigt ikke mindst ved Behandlingen af tresidede Hjørner, at et Savn ved EUKLID's Opstilling af stereometriske Definitioner bliver føleligt; det er ogsaa her, at man maa søge at forklare det. EUKLID skelner ikke mellem kongruente og symmetriske Rumfigurer. At Grækerne overhovedet ikke skulde have haft Øje for denne Forskel, er ganske utænkeligt, naar man ser hen til den græske Kunst. Særlig deres Bygningskunst virker jo bestandig, ligesom allerede den ægyptiske, dels ved en Gentagelse af de samme Figurer, dels ved Sammenstilling af indbyrdes symmetriske Figurer til saadanne, som har indre Symmetri. Den Bygmester, som gjorde Brug af disse Virkemidler, maatte være ganske fortrolig med Forskellen paa de Sten, som skulde være blotte Gentagelser, og saadanne, der skulde anvendes i forskellige, men indbyrdes symmetriske Dele af Bygningen, f. Ex. paa de modsatte Sider af en Gavl. Selv i Billedhuggerkunsten gav man jo i den ældste Tid ogsaa de menneskelige Figurer det, som JUL. LANGE har kaldt en frontal Stilling, som lod det menneskelige Legemes Symmetri træde umiddelbart frem, og en Billedhugger vilde ligesaa godt vide, om et Øre, der var faldet af en Billedstøtte, var det højre eller det venstre, som en Bygmester vilde kunne se, om et Brudstykke af en Gavl hørte til dens højre eller venstre Side. Mathematikerne, hvis Rumsans maatte være øvet ved virkelig forekommende Genstande, kunde ikke, naar de rationelt skulde gøre Rede for Rumformer, til hvis Egenskaber Praktikerne alt havde et intuitivt Kendskab, overse den her nævnte Forskel. De kunde snarere betragte den som saa iøjnefaldende, at det ikke var nødvendigt at omtale den nærmere. Til dette kunde de dog kun forledes af Bestræbelser efter under det ideelle Studium af den fra Virkeligheden abstraherende Geometri at gaa saa vidt i deres Abstraktioner, at denne Forskel maatte betragtes som uvæsentlig.

Ganske uden Hensyn til, om man vil billige et saadant Standpunkt, maa Historikeren bestræbe sig for at forstaa det og de Grunde, som har bragt EUKLID og hans samtidige til at indtage det. En god Vejledning hertil faar man ved EUKLID's Behandling af de tilsvarende plangeometriske Spørgsmaal. Her har vi set i VIII. Kap., at EUKLID bestræber sig for saa meget som muligt at undgaa at bevise Ligestorhed ved en ved Flytning tilvejebragt Sammenfalden, paa samme Tid som han ikke kunde undgaa i Alm. Begr. 7. at anføre en opnaaet Dækning som Kendetegn paa Ligestorhed. Naar han i I, 4. vilde benytte dette Kendetegn, kunde det dog, trods hans øjensynlige Bestræbelser, kun ske paa en Maade, der mindede noget om den mekanisk anskuelige Flytning, hvad, som vi saa, hans egne samtidige misbilligede. Svagheden i hans Betragtning beroede paa, at Sætningen først vilde kunne anvendes, naar Flytningen kan ombyttes med en Konstruktion af den paagældende Figur paa et nyt Sted. Den paastaaede Ligestorhed af alle den nye Figurs Dele med den oprindeliges kommer da til at bero paa, at Figuren paa dens Beliggenhed nær bliver fuldkommen bestemt ved de Stykker, der opgives at være ligestore. Det er denne Entydighed, som bevises ved „Alm. Begreber". Det er overensstemmende hermed, at Euklid overhovedet ikke indfører Begrebet kongruent i dets nuværende Betydning, nemlig som Betegnelse for Figurer, der ved Flytning kan bringes til Dækning. Det stemmer ogsaa hermed, at han heller ikke i Planen skelner mellem saadanne Figurer, som allerede ved Forskydning i Planen kan bringes til Dækning, og saadanne, hvor endnu en Omlægning er nødvendig, en Forskel, der, naar man som Euklid vil behandle Plangeometrien ganske selvstændig uden at gaa udenfor Planen, er ligesaa betydningsfuld som den mellem Kongruens og Symmetri i Rummet. Han bruger kun, at det med Hensyn til den søgte Ligestorhed af Figurers enkelte Dele er ligegyldigt, om en Figur skal konstrueres til den ene eller anden Side af en opgiven fast Linie, og at dette derfor end ikke behøver at siges.

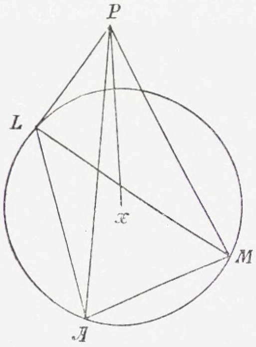

Fig. 14.

Hvorledes Euklid ved samme Betragtning kan paavise Ligestorhed mellem Størrelser i Rummet paa en Maade, der ganske stemmer med den, hvorpaa han gør det i Planen, kan bedst ses af hans Behandling af tresidede Hjørner. Hans Sætning XI, 23. indeholder, som allerede bemærket hans Bestemmelse af et saadant ved tre Sider, som tilfredsstiller de i 20. og 21. nævnte nødvendige Betingelser. Konstruktionen udføres ved, at der paa de tre Vinkler, som skal være Hjørnets Sider, afsættes indbyrdes ligestore Ben, hvis Størrelse vi vil kalde a. Af Grundlinierne i de derved bestemte ligebenede Trekanter kan da (Fig. 14) konstrueres en, ifølge I, 8., paa Beliggenheden nær fuldkommen bestemt Trekant LMA. I Centret af dennes omskrevne Cirkel X oprejses dernæst en Linie vinkelret paa dens Plan. Idet de Hjørnets Sider paalagte Betingelser medfører, at Radius r i denne Cirkel er mindre end a, kan man paa den nævnte vinkelrette afsætte $XP = \sqrt{a^2 - r^2}$, og Hjørnet P vil da netop have de opgivne Sider.

Ser man bort fra den fuldkommen vilkaarlige Beliggenhed af Trekanten og fra, om Punktet P tages paa den ene eller anden Side af Planen ALM, giver denne Konstruktion en entydig Bestemmelse af Hjørnet. Paa denne Entydighed maa der lægges stor Vægt, skønt Euklid ikke fremhæver den, thi den giver det eneste Grundlag for Rigtigheden af hans Anvendelse af Sætningen. I 26. konstruerer han saaledes et tresidet Hjørne med givet Toppunkt, en given Kant (og en gennem denne gaaende Sideflade), som er „ligt" (ἴση) med et givet tresidet Hjørne, og til at begrunde denne „Lighed" af det konstruerede Hjørne med det givne findes der hos ham intet andet end netop den i 23. udførte Konstruktion og den Omstændighed, at denne under de givne Forudsætninger om det fri Valg af Beliggenheden, derunder frit Valg mellem symmetriske Beliggenheder af P, er entydig. Det er ogsaa kun ad denne Vej, at man faar klar Besked om, hvad Euklid mener med den her paastaaede „Lighed“. Den vil i Virkeligheden omfatte Ligestorheden af alle „Flytningsinvarianter“, naar Flytning udvides paa saadan Maade, at den indbefatter Ombytning af en Figur med en dermed symmetrisk. Hjørnernes Lighed vil da indbefatte ej blot den forudsatte Lighed mellem Hjørnets Sider, men ogsaa Ligheden mellem dets Toplansvinkler. Saadanne Vinkler defineres i XI. Def. 6; men Euklid nævner dem ikke særlig i 26. Forstaaet saaledes er den omtalte „Lighed“ virkelig bevist ved Entydigheden af Konstruktionen 23., idet man nok tør antage, at Euklid, der i I. Bog stiltiende har antaget Muligheden af en Flytning i Planen (se S. 72 (270)), ogsaa stiltiende antager den i Rummet samtidig med, at Begrebet Flytning udvides ved deri at indbefatte en Ombytning med den symmetriske Figur. Begge Steder er det ved en Konstruktion, at den blot som mulig forudsatte Flytning virkeliggøres.

Den her nævnte Udvidelse stemmer i Virkeligheden ganske med de rationelle Principer, som Euklid bestandig følger. Der gives jo nemlig intet Middel, hvorved man paa Forhaand kan karakterisere den ene af to symmetriske geometriske Figurer, som ikke ogsaa vilde passe paa den anden; først naar man har valgt den ene, kan man karakterisere Forskellen mellem en dermed kongruent og en dermed symmetrisk Figur. Først naar man i det foreliggende Tilfælde har valgt den ene Side af Planen *ALM*, kan man derved skelne mellem „den samme“ og „den modsatte“ Side. Paa Forhaand gives der altsaa intet Middel, hvorved man kan sige om det Hjørne, man i 23. vil konstruere, skal være det ene eller det andet af de to indbyrdes symmetriske Hjørner, der kan bestemmes, og Euklid, der netop vil have det rationelle frem, det, der kan udtrykkes i Ord[1]), føler sig bundet til ikke at lægge mere Vægt paa denne Forskel end paa den, der kan hidrøre fra de forskellige mulige Beliggenheder af Trekant *LMA*, der, naar ikke mere er givet, heller ikke kan beskrives i Ord. Bag efter kunde han dog have tilføjet, at man faar to forskellige Hjørner, der ikke kan bringes til Dækning ved mekanisk Flytning. En Forklaring heraf burde ogsaa findes i en i moderne Forstand elementær Fremstilling; men dertil finder Euklid ingen Anledning, netop fordi han ikke vil tale om mekanisk Flytning. Det er de absolute Bestemmelser, Euklid vil have frem, og det er ikke absolut, men kun relativt i Forhold til hinanden, at man kan skelne mellem Beskrivelsen af to symmetriske Figurers Egenskaber, ligesom ogsaa Stedbestemmelser i Rummet er relative. Derfor nævner han i Rummet ligesaa lidt kongruente som symmetriske Figurer, ja synes endog at sætte en Ære i at kunne undgaa det og at kunne behandle saadanne Figurer under et.

Det er altsaa ad den samme Vej som i Plangeometrien, at Euklid har kunnet paavise Ligestorhed i Stereometrien. Denne Vej er endog bleven væsentlig forkortet ved Anvendelse af det, som allerede var opnaaet i Plangeometrien. I denne maatte han benytte „Almindelige Begreber“ 7. og 8. til i Sætning I, 4. at bevise

[1]) At det er denne Omstændighed, der i Euklid's Fremstilling har fjernet Forskellen mellem kongruente og symmetriske Figurer, har ogsaa Prof. Juel fremhævet i en Samtale herom.

Entydigheden af en Konstruktion, som han først senere var i Stand til at udføre. I Stereometrien derimod fremgaar Entydigheden af den Konstruktion, som her nærmest svarer til Konstruktionen af en flyttet Vinkel, nemlig den af et Hjørne med givne Sider, af det i Plangeometrien beviste, særlig af I, 4., hvor de „Almindelige Begreber“ allerede er anvendte, og han fritages saaledes nu for at vise tilbage til disse. Den Omstændighed, at Behandlingen derved bliver mindre udførlig, forbunden med nogen Mangel paa Udtryk for den mere almindelige Synsmaade, som paa en Gang skal omfatte kongruente og symmetriske Figurer, har imidlertid givet Plads for nogen Uvished om Rækkevidden af hans Paastande, saaledes om Omfanget af det udefinerede Begreb: „Lighed“ af Hjørner. Dette træder saaledes frem i en Bemærkning af R. Simson, som Heiberg tiltræder i sin Udgave af Euklid (II. Bd., S. 81, Note 2), nemlig at Euklid intetsteds har bevist den i XI, 26. benyttede Paastand, at tresidede Hjørner med samme Sider er „lige“. Dette Savn maa vistnok gaa ud paa, at det ikke ved at lægge det ene Hjørne over paa det andet er bevist, at Hjørnerne er kongruente. I det Tilfælde, hvor Hjørnerne ikke bliver symmetriske, vil Beviset herfor kunne opnaas ved de samme Betragtninger som den af os paastaaede Entydighed; men til et saadant Paalægningsbevis kunde Euklid ikke indskrænke sig, dels fordi han vil undgaa mekanisk Flytning, dels fordi der saa intet Hensyn toges til den anden Mulighed, nemlig at Hjørnerne kan være symmetriske. Det er Bestræbelserne efter at tage begge disse Hensyn, som noget har dækket over den Bevisførelse, som 23. i Virkeligheden rummer.

Jeg fastholder saaledes, at Euklid ikke har overset den fra Kongruens forskellige Symmetri. For tresidede Hjørners Vedkommende eller for den dermed ensgældende Behandling af sfæriske Trekanter træder dette endnu tydeligere frem i Menelaos' alt nævnte mere indgaaende Undersøgelser af dette Emne. Udtalelserne passer ligegodt paa kongruente og symmetriske Trekanter, idet der som i Euklid I, 4. blot siges, at Trekanter, der har visse Stykker ligestore, ogsaa maa have de øvrige Stykker ligestore. Og i Beviserne undgaas alle Operationer, der ikke ligesaa vel kan passe paa symmetriske som paa kongruente Trekanter. Herpaa gør Bjørnbo opmærksom i sit anførte Skrift (se særlig S. 32).

Naar man har fundet ud af, hvad Euklid mener med den „Lighed“, som skal finde Sted mellem to tresidede Hjørner, der har samme Sider, og som altsaa er enten kongruente eller symmetriske, og hvorledes han kan mene at have bevist den ved Konstruktionen i 23., vilde man ikke finde det urimeligt, om han var vedblevet at anvende den samme Behandlingsmaade paa Størrelse og Form af Legemer. Efter at have konstrueret tresidede Hjørner vilde han med Lethed have kunnet konstruere en tresidet Pyramide f. Ex. med tre givne Sideflader, og denne Konstruktions Entydighed, fraset Forskelle i Beliggenhed og Symmetriforskel, vilde her være ligesaa indlysende som i 23. for Hjørnernes Vedkommende. Dernæst kunde alle Polyedre sammensættes af tresidede Pyramider. En saadan Fremstilling vilde være elementær i samme Forstand som I. Bog og fraset Manglen paa en formel Definition have den Soliditet, som de gamle krævede af „Elementer“.

Euklid har derimod faaet Skrupler ved ogsaa at skulle behandle Legemer, der jo i Modsætning til Hjørner virkelig har en Størrelse, uden at give dette Begreb en udtrykkelig Definition. Af Hensyn til, at han ikke alene vil gaa ud fra, at kongruente Legemer er ligestore og ligedannede, men ogsaa fra, at symmetriske Legemer skal være det i den Betydning, hvori han tager disse Begreber, maa han nemlig have anset en Henvisning til I. Alm. Begr. 7. for utilstrækkelig. Han har imidlertid paa flere Maader været uheldig med den Definition, som han har opstillet, nemlig XI., Def. 10.: Ligestore og ligedannede Polyedre er saadanne, som indesluttes af ligemange, ligestore og ligedannede Sideflader. Dermed sigter jeg dog ikke til, at der tages flere Betingelser med end nødvendigt. Som ogsaa Aristoteles fremhæver, skal Definitionen jo kun sige, hvad det definerede er; men det skal bevises (eller postuleres), at det er. Der risikeres altsaa ikke noget ved at give for mange Kendetegn; thi først i Existensbeviset skal det sikres, at de Legemer, der har det tilstrækkelige Antal Kendetegn, ogsaa har de øvrige, som opstilles. Heller ikke skal jeg dvæle ved, at der ikke udtrykkelig siges, at den indbyrdes Ordning af disse Sideflader skal være den samme, saavidt den kan udtrykkes i Ord (hvad der ikke udelukker, at den kan være symmetrisk tilsvarende).

Værre er det, at Euklid benytter den formelle Frihed, som Brugen af en Definition giver ham, til at skaffe sig Lettelser, som maa efterlade et Savn hos Læseren. Legendre har bemærket[1]), at her ikke foreligger en Definition, men en Sætning, som kræver et Bevis. Hertil kan siges, at en Sætning ikke kan opstilles, naar der ikke for Polyedre foreligger en bestemt og utvetydig Forklaring paa, hvad ligestore og ligedannede Polyedre er, som ogsaa omfatter symmetriske Polyedre. Disse har Euklid ment at maatte tage med i Definitionen, da han vistnok ikke har set, hvad der nu er bekendt, at Ligestorheden af symmetriske Legemer kan bevises, naar Ligestorheden af kongruente Legemer er indrømmet. Naar han nu har følt sig forpligtet til at opstille en særlig Definition for Polyedres Ligestorhed, har han anset sig for ligesaa fri, som da han i Plangeometrien opstillede særlige Definitioner paa Ligedannethed af retlinede og krumlinede Figurer (se S. 91 (289)). De intuitive Forestillinger, som helst skulde tilfredsstilles ved Opstillingen af saadanne Definitioner, som giver Begreber anvendte paa forskellige Figurer samme Navn, gør han ikke Rede for — det gør man i det hele ikke i den rationelle Behandling — og da mener han i sin Definition at kunne bruge saadanne Kendetegn, som han selv anser for tilstrækkelige, og som tillige er lette at lægge til Grund ved forekommende Anvendelser. Han vilde have haft lettere ved at faa Læserne til at godkende hans Definition, hvis han først havde bevist, at Hjørnerne i et Polyeder med ligestore og ligedannede Sideflader er, hvad han i 26. har kaldt „lige“, og at Toplanvinklerne saaledes er ligestore; naar mindst et Hjørne paa hver Kant er tresidet, vil dette kunne bevises ved Sætning 23. Værst er det dog, at denne Sætning, der maatte

[1]) Angaaende de Bemærkninger, som i Tidens Løb er gjort til den foreliggende Definition, kan henvises til Heath III S. 265 f.

være en nødvendig Betingelse for at kalde Polyedrene ligedannede, ikke altid er rigtig, og at Polyedrene da heller ikke kan kaldes ligestore. Som Exempel herpaa nævner R. Simson Polyedre, der er dannede som Sum eller Differens af to Pyramider paa samme Grundflade (Differens i det Tilfælde, at de begge ligger paa samme Side af denne). For at nævne et Polyeder, som ogsaa Euklid senere behandler, kunde man af et regulært Ikosaeder danne et andet med samme Sideflader ved at lade den Pyramide, der til Sideflader har de 5, som ligger om samme Hjørne, gaa indad. Disse Exempler viser, at heller ikke Formen af en Definition tilsteder hvilkesomhelst Friheder. En Definition maa ikke komme i Strid med andre af de opstillede Forudsætninger, men vilde her komme i Strid med I, Alm. Begreb 8., at en Del er mindre end det hele. Man har villet undskylde Euklid med, at han her kun skulde tale om konvexe Polyedre, og Cauchy har ført et Bevis for „Definitionens" Brugbarhed i dette Tilfælde; men dels nævner Euklid ikke denne Indskrænkning, dels tyder intet paa, at Euklid har kunnet føre et saadant Bevis for, at Hjørnerne i det Tilfælde bliver „lige" eller Toplansvinklerne ligestore. Dette kan han vel, og endog meget let, i alle de Tilfælde, som han virkelig behandler; men det er en let købt og, som det har vist sig, uægte Pynt, naar Euklid har udstrakt sin Definition til at skulle gælde alle Polyedre uden at prøve, om de nødvendige Betingelser herfor er tilstede, med samme Omhu, som han vilde have anvendt, hvis Talen havde været om en Sætning, som skulde bevises. At dette, saavidt man ved, har kunnet gaa upaatalt hen i Oldtiden, da saa mange store Mathematikere byggede paa Euklid, maa bero paa, at man i Virkeligheden kun har behandlet denne Definition som en Pynt, som ikke brugtes udover saadanne Tilfælde som dem, hvor Euklid selv anvender den, og hvor den paastaaede Ligestorhed ikke efterlader nogen Tvivl. I Følelsen af den Tryghed, hvormed man med fuldeste Ret i Almindelighed kunde bygge paa Euklid, gav man sig ikke til at prøve, om han havde Ret i at udstrække en saadan enkelt Paastand ud over det Omraade, hvor man gjorde virkelig Brug deraf. I saadanne Undtagelsestilfælde som dem, vi har nævnt, vilde man ikke tænke paa at anvende hans Definition paa det ukonvexe Legeme, men betragte dette som en Differens mellem to konvexe. Og selv den, der bemærkede Manglen paa Overensstemmelse med hans Definitions Ordlyd, vilde saa mene, at denne kun skulde gælde konvexe Legemer, og for disses Vedkommende stole paa Euklid uden nøjere at prøve hans Paastand.

Hvad her er sagt om ligestore og ligedannede Polyedre, gælder ogsaa om Definition 9. paa ligedannede Polyedre. Særlig skal vi blot fremhæve, at ogsaa Ligedannethed hos Euklid maa omfatte baade, hvad vi nu kalder Ligedannethed, og hvad vi kalder symmetrisk Ligedannethed.

Anmærkning om Brug af Fortegn. Endnu skal jeg tilføje, at der er nogen Overensstemmelse med den her omtalte Mangel paa Skelnen mellem Kongruens og Symmetri og Manglen af Fortegn hos de gamle. Som nys bemærket vilde der være ligesaa megen Grund som i Rummet til ogsaa i Planen at medtage den nævnte

Skelnen, naar man dog ikke vil bruge Flytninger og mindst saadanne, hvor en Figur maatte tages ud af sin Plan. Ved den geometriske Fremstilling af algebraiske Forhold er det tilsvarende ved Operationer med én Dimension en Skelnen mellem de to Retninger paa en ret Linie ved et Fortegn — eller noget, som svarer hertil. Ogsaa denne Skelnen er imidlertid underkastet den samme Relativitet som den mellem Kongruens og Symmetri; hvilken Retning der skal være positiv eller negativ, beror fra først af paa et Valg, og ikke blot saadanne Valg undlader Euklid, men ogsaa det af Enhed, som undgaas ved overalt at operere med Forhold, og det af et fast Begyndelsespunkt for Liniestykker (Abscisser), hvorfor et Liniestykke betegnes ved begge sine Endepunkter. Euklid har sikkert endog sat Pris paa den derved opstaaede formelle Almindelighed, saaledes at Sætninger og Beviser under et omfatter Figurer, som vi vilde kalde kongruente og symmetriske.

Iøvrigt maa bemærkes, at det at træffe de nævnte Valg heller ikke paa langt nær vilde være af den Betydning for den Algebra, der bruger geometriske Symboler, som for den, der bruger litterale Betegnelser for Størrelser og Operationer. Kan der end saaledes være andre gode Grunde til at prise den nuværende Symboliks overordentlige Fordele, maa man ikke dertil føje Brugen af en bestemt Enhed, af et fast Begyndelsespunkt og af Fortegn eller af Begrebet Symmetri, som yderligere Fortrin, men som Fordele, der er blevne særlig betydningsfulde for den, der bruger den litterale Symbolik. I de enkelte Tilfælde kan det for den, der bruger den geometriske Symbolik, endog bringe Fordele ikke at have truffet disse Valg. Vi har saaledes S. 56 (254) set, at Gnomonfiguren ikke alene udtrykker det samme som vor Formel for $(a+b)^2$, baade naar a og b har samme, og naar de har modsat Fortegn, men tillige det, som vi udtrykker ved Formlen $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Paa den anden Side maa det indrømmes, at noget, der svarer til at regne Størrelser med Fortegn, paa flere Steder vilde have sparet de gamle for en Udstykning i forskellige Sætninger; det vilde f. Ex. have tilladt dem at behandle det elliptiske og det hyperbolske Fladeanlæg under et.

Kap. XV.

Euklid og hans Elementer.

Den Tid ligger ikke langt tilbage, da man kaldte Euklid Geometriens Fader og dermed forbandt den Forestilling, at paa nogle Undtagelser nær, som allerede Pythagoras havde opdaget, baade den geometriske Viden og den rationelle Begrundelse deraf, som vi finder i Euklid's Elementer, i det væsentlige skulde skyldes ham. Dette var en uhyre Undervurdering af det Tankearbejde, som har været nødvendigt for at vinde, udtrykke og begrunde den store Sum af Viden, som Elementerne rummer. Efterat den en Gang er samlet, kan den vel tilegnes i Løbet af nogle Læreaar, saaledes som det sker i vore Skoler; men at dette er blevet muligt, skyldes Forarbejder og en videre Bearbejdelse, som ikke kunde være en enkelt Tidsalders, endsige en enkelt Mands Værk. Den nævnte Opfattelse af EUKLID's Udførelse af dette Storværk er da ogsaa bleven grundig ændret ved det sidste halve Aarhundredes historiske Forskning, særlig efter at BRETTSCHNEIDER i: „Die Geometrie und die Geometer vor Euklides“ (1870) havde henledet Opmærksomheden paa de Oplysninger om den føreuklidiske Geometri, som findes i EUDEMOS', ved PROKLOS bevarede, Mathematikerfortegnelse. I Tilslutning til denne har man fra mange Sider, ikke mindst gennem det opbevarede Fragment af HIPPOKRATES fra Chios, kunnet paavise baade en ældre geometrisk Viden og en Evne til at bruge denne, som, om end paa et mere begrænset Omraade, ikke staar meget tilbage for den, man først vilde vente hos dem, der har studeret EUKLID. Paa samme Tid kunde man vanskelig løsrive sig fra den Tanke, at man under Erhvervelsen af denne Viden i det væsentlige maatte være gaaet samme Veje, som vi lærer at kende hos EUKLID, og som vi ogsaa den Dag i Dag er tilbøjelige til at betragte som de eneste naturlige eller dog de eneste nogenlunde paalidelige. Naar saaledes G. J. ALLMANN i sin Bog: „Greek Geometry from Thales to Euklid“ (1889) med stor Omhu sammenstiller de Oplysninger, som ad forskellige Veje haves om hver enkelt Mathematikers Bidrag eller Viden i det paagældende Tidsrum, og han vil forklare sig Besiddelsen af denne Viden, viser han paa ethvert Punkt hen til saadanne Betragtninger, som vi nu i Tilslutning til EUKLID vilde anstille. Saadanne Betragtninger er man i det hele bleven tilbøjelig til at tillægge de ældre Mathematikere sammen med den positive Viden, som Beretningerne om dem gaar ud paa. Man har endog i EUKLID's Fordeling af Stoffet i de forskellige Bøger ment at se en mere eller mindre tilfældig Sammenstilling af det Stof, som er overleveret ham fra forskellige Tider. EUKLID faar da, fraset enkelte Udvidelser af Stoffet, som man ikke vil frakende ham, væsentlig kun Æren for at have givet Enkelthederne de efterhaanden udviklede Former, der lader Slutningernes indre Sammenhæng træde tydelig frem ogsaa i det ydre. I Udviklingen af disse Former, der dels er gaaet forud for den aristoteliske Logik, dels er fremkomne under Paavirkning af denne, og i deres Tilpasning til Fremstilling af mathematiske Sætninger og disses Begrundelse, har EUKLID tilmed haft Forgængere i de ældre Elementforfattere. I Henhold til saadanne Betragtninger er Historikere i Nutiden komne til en Opfattelse af EUKLID's egen Andel i hans Elementer, stik modsat den ovenfor nævnte. Den ændrede Opfattelse giver endog PAUL TANNERY, der dog er den grundigste Kender af den ældre græske Mathematik, og som har givet de bedste Oplysninger om de Hjælpemidler, som i den kom til Anvendelse, Udtryk, naar han i sin Artikel om EUKLID i „La Grande Encyclopédie“ [1]) siger, at „Elementerne“, og hvad der ellers er bevaret fra EUKLID's egen Haand,

---

[1]) Mémoires scientifiques, t. III. S. 365.

„ne suffirait pas pour attester son originalité comme géomètre“, men derimod grunder sin Formening om hans fremragende Betydning som saadan paa de Beretninger, som foreligger om hans øvrige Arbejder.

Ogsaa jeg finder vel, at Beretningerne om disse andre Arbejder vidner om EUKLID's store Fortjenester, men jeg mener, at det i langt højere Grad er det Værk, hvortil EUKLID's Navn har været knyttet i over 2000 Aar, som har gjort ham værdig til den Hæder endnu at mindes ogsaa udenfor Mathematikernes og Historikernes Kreds, og det er for denne Mening jeg tror at have givet gode Grunde i nærværende Skrift. Ganske vist har jeg deri fremhævet det Omfang, som den mathematiske Viden havde naaet allerede før PLATON; men jeg har tillige vist, hvorledes denne Viden kunde naas, uden at man da foregreb saadanne Betragtningsmaader som dem, der særlig karakteriserer EUKLID. Man brugte da en Intuition af en helt anden Art og et andet Omfang end den, hvis Resultater sammentrænges i de af EUKLID udtrykkelig opstillede Forudsætninger. Man drog ogsaa sikre og gode Slutninger; men isolerede, som de var i deres Anvendelser paa de Spørgsmaal, som man netop havde for Øje, savnede de den videnskabelige Sammenhæng, uden hvilken man vel baade selv kan vinde og bibringe andre personlig Tillid til de vundne Resultater, men ikke føre et fuldstændigt mathematisk Bevis. Dertil var det ikke nok at udbedre de logiske Former, hvorunder man udtrykte de enkelte Sætninger og deres Begrundelser. Der maatte opføres en sammenhængende Lærebygning, hvori hvert Led kunde støtte sig paa det allerede beviste, og dette kunde, som vi har set, kun naas ved en fuldstændig Omformning af tidligere Opstillinger. EUKLID's Elementer er det endelige Resultat af denne Omformning; i dem er PLATON's Idealer realiserede paa en Maade, der ogsaa stemmer med de af ARISTOTELES opstillede logiske Regler.

Menneskeheden er med Hensyn til det ved EUKLID naaede Standpunkt gaaet samme Vej, som efter mange Vidnesbyrd mathematiske Opdagere og Opfindere i Reglen gaar i deres personlige Arbejder. Først kommer de til deres Resultater gennem Analogier, Intuition samt Slutninger af ret isoleret Beskaffenhed. Før Udgivelsen, og vel ogsaa for selv at modstaa Fristelsen til at give deres Resultater en for stor Rækkevidde, maa de derimod gennemføre et fuldstændigt Bevis. Det er ikke mindst i denne sidste Henseende, at man i vore Dage har skærpet Fordringerne og lagt et stort Arbejde ind paa at opfylde dem og sætte andre i Stand til at opfylde dem. Naar man nu netop i vor Tid lægger saa stor Vægt paa dette Arbejde, bør man se særlig hen til EUKLID, der er gaaet i Spidsen. Det kan ikke undre, at de, der nu bestræber sig for, ogsaa paa videre Omraader, at naa den samme absolute Exakthed, som EUKLID tilsigtede, bedre end andre kan se, hvad der mangler ham i virkelig at naa dette Maal; men de fristes ogsaa til at forse sig saaledes paa de Veje, ad hvilke de selv mener at gaa trygt, at de ikke nøjere prøver, om man ikke ogsaa kan komme frem ad dem, som EUKLID har fulgt, og om det ikke ofte ved en grundigere Prøvelse af meget hos ham, som man i lange Tider ikke havde paaagtet, skulde vise sig, at EUKLID blot under andre Former har set og overvundet de samme Vanskeligheder, som Nutiden har faaet Øje paa. I alle Tilfælde bør de sætte Euklid højt som den, der oprindelig har brudt de Baner, som man atter nu slaar ind paa.

I disse Linier har jeg vel for Nemheds Skyld omtalt det Værk, som Euklid bragte til Afslutning, som Euklid's Værk, medens jeg her i mit Skrift har vist baade dets Overensstemmelse med Platon's Tilskyndelser og det udmærkede Arbejde, som Platon's Samtidige og nærmere Efterfølgere har sat ind paa at fremme det, og den Andel, de har i dets endelige Skikkelse. Jeg tror dog, at Skildringen heraf fremfor alt vil have vist, hvor stort og omfattende dette Arbejde har været, og at der saaledes blev nok tilbage for Euklid selv. Bestræbelserne for at gennemføre den tilsigtede Reform og Forhandlingerne derom mellem en Mængde dygtige Mænd strakte sig da ogsaa saavidt, at Beretningen derom kun kan befæste Beundringen for den Mand, der gjorde Ende paa disse Forhandlinger og gav det hele Værk en endelig Form, som vandt fuld Anerkendelse, foreløbig som det videnskabelige Grundlag for Alexandrinernes frugtbare mathematiske Arbejde. Den, der har gjort dette, maa have været en stor Mathematiker, vel først og fremmest i Besiddelse af en skarp, klar og sikker mathematisk Tænkning, men ogsaa i Besiddelse af en levende mathematisk Opfindsomhed for at lave de nye Beviser, som alene Omflytningen af Sætningerne gjorde nødvendige, og udtænke de nye Hjælpemidler, som skulde sættes i Stedet for de gamle mere intuitive.

Det er som et rent videnskabeligt Værk, at Euklid's Elementer har deres Betydning. De indeholder ikke alene den Viden, som maatte give Udgangspunkter for videregaaende Undersøgelser, men indeholder den i en saadan Skikkelse, at de kunde danne et sikkert videnskabeligt Grundlag ogsaa for disse. At tilfredsstille de rent videnskabelige Krav, deriblandt ogsaa det aristoteliske om Sætningernes Almindelighed, er Euklid's Hovedformaal, ja, vel det eneste, som Euklid har sat sig. Tingenes Natur medfører dog, at de ensartede og bestemte Former, som skal sikre Bevisernes Tilforladelighed, tillige bidrager til deres Overskuelighed, og denne Overskuelighed fremmes væsentlig ved Tegningen af de Figurer, hvis almindelige logiske Beskrivelse og Anvendelse allerede udtrykkes i Teksten, medens de tegnede Figurer har en mere ufuldkommen og ganske speciel Beskaffenhed (se XIII. Kap.); de optræder som de Symboler (se II. Kap.), ved hvilke de i Teksten udtalte Tanker fastholdes. Udover dette giver Euklid ikke nogen yderligere Vejledning gennem Overblik over, hvad han har gjort eller vil gøre, og hvorfor, eller ved Sammenligninger mellem Behandlingen af beslægtede Genstande o. desl. Endog den ydre Sammenstilling af saadanne Genstande er, saaledes som vi særlig har set det af Ordningen i hans første Bog, et Hensyn, som han ikke altid naar at tage ved Siden af det bygningsstatiske, at hver Sten skal hvile paa de tidligere nedlagte, hver Sætning staa paa en Plads, hvor den selv bæres af de foregaaende og bidrager til at bære de efterfølgende. Intet Talexempel og ingen simpel Anvendelse tilføjes som Hjælpemiddel til at faa fat paa, hvad der menes med de opstillede almindelige Sætninger og Beviser.

Bogen giver derfor heller ingen Anvisning paa, hvortil og hvorledes den efterhaanden vundne Viden skal bruges, undtagen forsaavidt man ser, hvorledes EUKLID selv efterhaanden anvendte den til at begrunde en ny Viden, og man saaledes kan følge hans Exempel for at naa endnu videre. I XII. Kap. har vi jo saaledes nævnt, at han ikke fremhæver den Form, hvori Fladeanlæg bekvemmest kan anvendes, men at hans fortsatte Undersøgelser i X. Bog giver talrige Exempler paa, hvorledes EUKLID selv brugte dem. Om Anvisning paa praktisk Anvendelse udenfor den rene Videnskab er der slet ikke Tale. Der siges intet om, hvorledes man med størst Nøjagtighed skal foretage de Maalinger, som skal give de Talværdier, hvormed man skal operere, og ligesaalidt, hvorledes man saa skal foretage de Udregninger, som det i Praksis særlig vil komme an paa. En antik Oplysning herom finder vi først i HERON's nylig genfundne *Metrica*. Deraf ser man blandt andet, hvorledes den geometriske Tilbageføren til Anvendelse af den pythagoreiske Sætning eller en Mellemproportional gav samme Anvisning paa at løse en Opgave ved Kvadratrodsuddragning, som man nu faar ved en algebraisk Tilbageføren til et Udtryk, der indeholder et Kvadratrodstegn; dette havde man vel kunnet slutte af EUKLID's X. Bog, men umiddelbart udtaler han det ikke. Selv paa den praktiske Udførelse af en geometrisk Konstruktion giver EUKLID ingen Anvisning. Han nævner ikke de dertil tjenende Redskaber, og for mere sammensatte Konstruktioner fører han kun Opgaven tilbage til tidligere behandlede Konstruktioner. Dette er fuldkommen tilstrækkeligt, naar Konstruktionerne skal afgive Bevis for Existensen af de Figurer, som derved bestemmes; den praktiske Udførelse faas først ved en Forbindelse af de i en Række forskellige tidligere Sætninger angivne Konstruktioner, og de givne Anvisninger paa disse yder ikke noget samlet Overblik over den saaledes sammensatte nye Konstruktion, et Overblik, som paa mange Maader vilde kunne simplificere deres samtidige Anvendelse.

Man kan tænke sig disse Mangler udfyldte under den mundtlige Undervisning ved de dertil knyttede Demonstrationer og Øvelser, og man har sikkert ikke paa EUKLID's Tid forsømt at bruge disse Hjælpemidler til at give den rette Anvisning baade til at forstaa og til at anvende hans Bog. Naar EUKLID i denne har kunnet undlade enhver Vejledning hertil, forstaas dette dog bedst deraf, at han ene tilstræber at give en sammenhængende og strengt videnskabelig Fremstilling af et Stof, hvoraf han, som de i det sidste halve Aarhundrede fremdragne Oplysninger har vist, kunde antage en Del bekendt. Selve Hovedindholdet maatte han dog fremstille i sin fulde Sammenhæng; dette var netop hans Opgave; men Anvendelserne deraf, til hvilke de ældre Tiders Opdagelse sikkert særlig havde knyttet sig, kunde han for denne Dels Vedkommende forudsætte bekendt for sine Læsere. Derved vilde disse ogsaa finde tilstrækkelig Anvisning til paa lignende Maade at bruge det nye Indhold, som kom til under hans Behandling. At han under disse Vilkaar ikke blot kunde finde forstaaende Læsere blandt dem, der allerede dyrkede Mathematiken, men ogsaa i den opvoksende Slægt, maa bero paa, at denne allerede gennem Skoleundervisningen i Logistik, Metretik og Geodæsi var bleven bekendt med praktisk Anvendelse af de simpleste af de mathematiske Resultater, men uden endnu at have lært disses rent videnskabelige Begrundelse at kende. Dette gjorde først de, der som „Studenter“ vedblev at dyrke Mathematiken; for disse var EUKLID's Elementer bestemt, og for dem var det overflødigt at vise tilbage til Anvendelser, som de kendte forud eller om fornødent samtidig fik indøvet. Det var ogsaa først dem, der besad de rette Betingelser for at faa det fulde Udbytte af EUKLID's Elementer, hvad vi i næste Kapitel vil faa bekræftet ved at betragte dem, der i senere Tider har villet lære Mathematik af EUKLID uden at besidde lige saa gode Forudsætninger. Den her antagne Fordeling af Undervisningen stemmer ogsaa ganske med den, der i VII. Bog af PLATON's Stat skildres som ønskelig[1]). EUKLID's „Elementer“ har da netop været bestemt for dem, der skulde have den videregaaende Undervisning, som PLATON tiltænkte de vordende „Statsmænd“.

At EUKLID's Elementer havde det her skildrede rent videnskabelige Formaal, stemmer med den Betydning, vi i IV. Kap. har tillagt Ordet „Elementer“. De gør ikke blot den Del af den daværende Mathematik, som skulde danne Grundlaget for videregaaende videnskabelige Undersøgelser, til den af PLATON ønskede rent rationelle Videnskab; men de giver ogsaa nu Anvisning paa de Veje, ad hvilke det samme kan opnaas og er opnaaet for den med helt andre Symboler arbejdende nyere Mathematik. De har tillige været et Forbillede for den Omdannelse, som sikkert ogsaa hørte til PLATON's Idealer, af andre Videnskaber med realt Indhold til rationelle eller exakte Videnskaber. Maaske har man af og til, f. Ex. overfor Fysiken for nøje fulgt dette Forbillede og med Forsømmelse af den vigtige induktive Side fastholdt den for Mathematiken passende deduktive Vej; men hvor de rette Hensyn er tagne til de enkelte Videnskabers Ejendommeligheder, har baade Forbilledet og de mange direkte Laan fra Mathematiken bidraget til ogsaa at give dem en rationel Karakter. ARISTOTELES har vist de Veje, Tanken da maa følge; EUKLID's Elementer viser, at man ved Behandlingen af et positivt Stof kan naa Maalet ad disse Veje.

Kap. XVI.

EUKLID's Elementers Skæbne.

„Pro captu lectoris habent sua fata libelli“ skriver TERENTIANUS MAURUS i sit *Carmen heroicum* i det 2. Aarh. efter Chr., og den Skæbne maatte være ret vekslende, som maatte tilfalde et Værk med den her skildrede Karakter, der i mere end 2000 Aar har været brugt til Indførelse i Mathematiken. Den maatte veksle, eftersom dets Læsere var henviste alene til dette videnskabelige Værk uden paa

[1]) Se ogsaa E. SACHS' indgaaende Omtale af PLATON's „Love“ S. 160 ff. i det i mit Tillæg anførte Skrift.

anden Maade at orienteres og indøves i dets rette Brug, eller der ved Undervisningen deri gaves en Orientering og Øvelse af kyndige Lærere, der selv besad dem ved Overlevering, mundtlig eller gennem Skrifter, beregnede paa en lettere Tilegnelse af Formaal og Anvendelser. Den maatte veksle, eftersom denne Vejledning stemte med den, der gaves paa EUKLID's egen Tid, eller den, som i den nyere Tid har knyttet sig til senere opstaaede Lærdomme, der gjorde meget af, hvad EUKLID medtager og lægger Vægt paa, overflødigt. Det er dog kun en i Forhold til Emnets Vigtighed ret flygtig Omtale, vi her kan give af denne Skæbne. Hver enkelt af de efterfølgende Tiders Mathematik hænger saa nøje sammen med det, man i dem har lært af EUKLID, det, man har faaet ud af Læsningen af hans Elementer, og med den Maade, hvorpaa man har læst dem, at en Redegørelse for „Elementernes" Skæbne i mange Henseender vilde være en Redegørelse for hele Mathematikens Historie. Omvendt bliver et grundigt Kendskab til Elementerne, til hele disses Indhold og til Maaden hvorpaa, og de Synspunkter, ud fra hvilke dette behandles af EUKLID selv, og derved til deres Forstaaelighed for de følgende Tider, en Betingelse for den rette Forstaaelse af hele Mathematikens senere historiske Udvikling. Allerede dette Hensyn vil forklare den Betydning, som jeg tillægger saadanne Undersøgelser som dem, jeg har anstillet i nærværende Skrift, hvor stor eller ringe Værdi man nu vil tillægge det Udbytte deraf, for hvilket jeg her har gjort Rede.

Det i det følgende givne Overblik beror iøvrigt ikke paa nye Studier af den senere Mathematik. Jeg vil kun søge at paavise den Indflydelse, som de her skildrede Egenskaber ved EUKLID's Elementer har haft og maatte faa paa de forskellige Tiders Mathematik, efter hvad man allerede ved om disse og om deres Brug af EUKLID. Jeg medtager mere eller mindre, eftersom jeg i den Henseende mener at have noget at føje til, hvad der alt maatte være udtalt derom. Kun exempelvis kan jeg medtage Oplysninger om en i Tiderne vekslende Opfattelse af EUKLID's enkelte Sætninger, men henviser i saa Henseende til HEATH's omhyggelige Noter til hans alt ofte citerede „*Euklid's Elements*".

I nøjeste Overensstemmelse med Forfatterens Hensigt blev Elementerne sikkert benyttede af den Ungdom, som i Alexandria vistnok havde EUKLID selv til sin første Lærer i Mathematik. Den har nydt godt af hans egen og hans nærmeste Efterfølgeres Vejledning. Den vil være gjort opmærksom paa, hvad der opnaaedes ved de strengt videnskabelige Synsmaader, og paa Betydningen af de Former, hvori man havde ladet disse fremtræde; Farerne ved Forsømmelse i disse Henseender har EUKLID udtrykkelig eftervist i sine desværre tabte *ψευδάρια* (Fejlslutninger). Forud for Studiet af de strengt videnskabelige Elementer, eller i det mindste ved Siden deraf, vil de samme Elever have faaet Lejlighed til Indøvelse af de Operationer, ikke blot praktisk Regning, men ogsaa geometrisk Behandling af algebraiske Spørgsmaal, som er nødvendige for at anvende de strengt beviste Sætninger, ej blot praktisk, men ogsaa under den Behandling af videregaaende videnskabelige Emner, for hvilken „Elementerne" danner det rationelle Grundlag. Er det end ofte Almindeliggørelser af disse Operationer, som bevises i Sætningerne, har Operationerne selv maattet indøves i de Skikkelser, hvorunder de lettest og bedst anvendtes paa EUKLID's egen Tid og af ham selv, saaledes som f. Ex. de Fladeanlæg, han bruger i X. Bog. Ad saadan Vej forstaas det Præg, som EUKLID's Elementer satte paa den alexandrinske Skole, og den Andel, som de har i de Fremskridt, der skyldes de Mænd, som udgik af denne eller sluttede sig til den eller dog væsentlig var paavirkede af den. Her maa skelnes mellem Undersøgelser, der allerede var begyndte, da Elementerne blev til, og hvis Fremme man allerede havde for Øje ved deres Udarbejdelse, og saadanne som gjaldt helt nye Spørgsmaal, til hvilke Skolens Principer først maatte tilpasses for at komme til fuld Anvendelse.

Til de første hører de, der behandler Keglesnitslæren. I nøje Tilslutning til Behandlingen af Ligninger af anden Grad ved Fladeanlæg stod Bestræbelserne for paa lignende Maade at løse Opgaver, der afhænger af Ligninger af tredie Grad. De først fremtrædende Hovedexempler herpaa er Terningens Multiplikation og Vinklens Tredeling, altsaa de samme to Opgaver, hvortil man i det XVI. Aarhundrede viste, at alle Trediegradsligninger kan føres tilbage. Den første kunde man sikkert tidlig løse tilnærmelsesvis ved en mere eller mindre godt gennemført Kubikrodsuddragning, naar Opgaven forelaa numerisk; men det gjaldt om at faa en Løsning, der, ligesom Kvadratrodsuddragningens Omdannelse til Konstruktion af en Mellemproportional eller til Anvendelse af den pythagoreiske Sætning, ved sin geometrisk vel definerede Skikkelse kunde betragtes som fuldt almindelig og skikket til at give exakte Existensbeviser. Det var vel ikke svært at faa en til den plane Fremstilling af Algebraen af 2. Grad svarende stereometrisk Fremstilling af en Algebra af 3. Grad, nemlig ved Parallelepipeder og Kuber; paa denne er Fremstillingen af den rent kubiske Ligning som Terningens Multiplikation det første, men ingenlunde eneste Exempel (se f. Ex. HEIBERG's 2. Udgave af ARCHIMEDES III S. 136 ff.). Stort videre end til Ligningernes Fremstilling kom man dog ikke ad denne Vej. ARCHYTAS' stereometriske Løsning var nemlig ikke egnet til videre Anvendelse, og ved Brug af Keglesnit spiller den stereometriske Fremstilling af disse Kurver som Snit i Kegler kun en Rolle som Bevis for deres Existens, men baade deres videre Undersøgelse og deres Anvendelse som saakaldte „rumlige“ Steder til Løsning af „rumlige“ Opgaver er knyttet til plangeometriske Undersøgelser, altsaa til et Omraade, hvormed man forud var langt mere fortrolig end med Stereometrien.

Den plangeometriske Behandling af Opgaven om Terningens Fordobling hænger sammen med dens Omdannelse til den at bestemme to Mellemproportionaler. Den knyttes derved (se S. 40 (238)) til Skæring mellem de to Kurver, der i retvinklede Koordinater fremstilles ved Ligningerne $xy = ab$, $y^2 = bx$. Et Bevis for disse Kurvers Existens faas ved deres Fremstilling som plane Snit i rette cirkulære Kegler, og paa denne Maade stilledes ogsaa andre Keglesnit til Raadighed for Løsning af andre Opgaver, der afhænger af Ligninger af 3. eller endog af 4. Grad. Netop paa Grund af denne tjenende Stilling, som Keglesnittene skulde indtage overfor et Øjemed, som vi nærmest kan kalde algebraisk, bekymrede man sig foreløbig ikke om den stereometriske Bestemmelse af alle mulige plane Snit i alle cirkulære

Kegler, men holdt sig foreløbig til Fremstilling af de paagældende Kurver som Snit i rette cirkulære Kegler ved Planer vinkelrette paa en Frembringer, og dette ligger til Grund for de Navne: Snit i en spidsvinklet, retvinklet eller stumpvinklet Kegle, som man anvendte for Ellipse, Parabel og Hyperbel, indtil APOLLONIOS indførte disse sidste Navne. At det ikke var fra stereometriske Vanskeligheder, at denne Begrænsning hidrørte, ser man hos ARCHIMEDES, der, naar han har Brug for det, behandler ogsaa andre Snit i andre cirkulære Kegler, og tilmed gør dette i Henhold til Betragtninger, som ingenlunde betegnes som nye. Det ligger nær at antage, at man ogsaa før ham kan have undersøgt Snit i det mindste i andre rette cirkulære Kegler og netop paa Grund af, at man derved ikke kom til andre Kurver, har nøjedes med den Fremstilling af Keglesnit, som man ansaa for den simpleste. (Se særlig Kap. XXI i „Keglesnitslæren i Oldtiden").

Det var imidlertid den plangeometriske Fremstilling af Kurverne, der fortrinsvis interesserede Grækerne, som vi ser hos APOLLONIOS, der i sin Behandling af Keglesnittenes Elementer holder sig til den, saasnart han ad stereometrisk Vej har sikret Kurvernes Existens. Som vi ser hos ARCHIMEDES, var denne plangeometriske Fremstilling ogsaa før APOLLONIOS den, som man ofte i Nutiden betegner som APOLLONIOS' Sætning, der for Ellipse og Hyperbel gaar ud paa, at Forholdet $\frac{y^2}{xx_1}$ er konstant, naar y er Ordinaten til et Punkt af Kurven henført til Axen som Abscisseaxe, x og x_1 denne Ordinats Fodpunkts Afstande fra Kurvens Toppunkter. Hertil knyttedes altsaa de fortsatte Undersøgelser. Allerede ARCHIMEDES kendte den samme Fremstillings Gyldighed, naar Axen var en vilkaarlig Diameter, der skærer Kurven, y Halvdelen af en af denne halveret Korde. Paa denne Maade almindeliggjorde man ogsaa de Opgaver, som man kunde løse ved Kurverne, Almindeliggørelser, hvorpaa allerede EUKLID maa have lagt Vægt, da allerede han har beskæftiget sig med det saakaldte Sted til tre eller fire Linier.

En samlet Behandling af Keglesnittenes Elementer er os dog kun bevaret hos APOLLONIOS i de 4 første Bøger af hans Keglesnit[1]). Disse er affattede efter de samme Principer som EUKLID's Elementer og paa dette videregaaende Omraade med samme Formaal. Deres strengt videnskabelige Karakter sikres ved, at Beviserne helt igennem støttes paa, hvad der er bevist eller udtrykkelig forudsat i EUKLID's Elementer. Som EUKLID i Elementerne ikke giver nærmere Anvisning, f. Ex. paa den praktiske Brug af Fladeanlæg, lægger APOLLONIOS i de nævnte Bøger ikke an paa at give Meddelelse om de Anvendelser, man kan gøre af Læren om Keglesnit, navnlig til Løsning af rumlige Opgaver. Det er selve denne Lære, som skal fremstilles i sin fulde theoretiske Sammenhæng for derefter at kunne danne et paalideligt Grundlag for saadanne Anvendelser. Dette træder særlig tydelig frem i, hvad APOLLONIOS i sine Fortaler siger om tredie Bog, nemlig ikke, at den inde-

[1]) Ved hvad jeg her siger om dette Værk, kan jeg henvise til den udførlige Skildring og Forklaring af hele dets Indhold og dettes Enkeltheder, som findes i min: Keglesnitslæren i Oldtiden.

holder Bestemmelsen af „rumlige“ Steder og Løsningen af „rumlige“ Opgaver, men derimod, at den indeholder Beviser for de Sætninger (Elementer), hvoraf saadanne paa paalidelig Maade kan „sammensættes“. Han nævner endog udtrykkelig et Exempel paa geometriske Steder, nemlig „Stederne til tre eller fire Linier“ (se S. 30 (228) Anm.), hvis „Synthese“ man tidligere havde bygget paa utilstrækkelige Elementer, men som han nu gav et tilstrækkeligt og paalideligt Grundlag. Selve denne Synthese af disse eller de andre „rumlige“ Steder og Opgaver, hvortil Bogen kan og skal anvendes, finder han derimod ikke her Anledning til at give. En saadan har hørt andetsteds hen, saaledes til Værker som Aristaios: Rumlige Steder. Andre Behandlinger af saadanne Opgaver, for hvilke de fire første Bøger danner det videnskabelige Grundlag, giver Apollonios selv i sine følgende Bøger, særlig i V. Bog og ifølge Fortalen til VII. Bog i den tabte VIII. Bog.

For at gøre dette Grundlag saa fuldstændigt som muligt giver ogsaa Apollonios sine Elementer, som Euklid sine, en almindelig Form, uden at dvæle ved de mere specielle Former, med hvilke det kan være hensigtsmæssigt at nøjes ved de Anvendelser, for hvilke der er mest Brug. Og her er det, at han gaar helt tilbage til det stereometriske Udgangspunkt, og ikke nøjes med de ældre Fremstillinger som saadanne plane Snit i Kegler, der kan være tilstrækkelige til at frembringe alle de paagældende plane Kurver, men ogsaa giver den almindeligste Fremstilling af disse Kurver som vilkaarlige Snit i cirkulære Kegler.

For ret at forstaa Apollonios’ Keglesnit er det imidlertid ikke nok at kunne se, at han paa det overordentlig store Omraade, som han behandler, virkelig har naaet de Formaal, som han sætter sig. Hvis en Nutidslæser vil trænge ind i hans Værk ved en Gennemlæsning Sætning for Sætning uden paa noget Punkt at ty til de Genveje, som Algebra og analytisk Geometri kan yde ham selv, vil han staa overfor et Arbejde, som sikkert har afskrækket mange, og hvis han dog gennemfører Læsningen, vil han let savne de Overblik, uden hvilke man ikke føler nogen rigtig Tilfredsstillelse ved Læsningen. Hans Beundring for Apollonios, som har kunnet finde og bevise saa mange forskelligartede Sætninger, vil maaske vokse, men i Virkeligheden vil han forblive ganske kold og uforstaaende, saa længe han ikke kommer paa Spor efter de Hjælpemidler, som ogsaa et Geni som Apollonios behøver for at naa saa langt og vinde de Overblik, uden hvilke de vundne Resultater vilde komme til at bære et Præg af Tilfældighed. Fortrolighed med saadanne Hjælpemidler maa ogsaa forudsættes hos Apollonios’ oprindelige Læsere. Ved min Læsning af Apollonios har jeg ment at finde disse Hjælpemidler i den geometriske Algebra, hvis Hovedsætninger bevises af Euklid, men med hvilken de alexandrinske Mathematikere maa have vundet en langt større Fortrolighed, end Nutidslæsere af Euklid, der udelukkende ser paa disse i almindeliggjort Form fremsatte Sætninger, ofte er tilbøjelige til at tillægge dem. Det er Tegn paa denne Fortrolighed, jeg i nærværende Skrift har søgt at eftervise allerede i selve Euklid’s Elementer, f. Ex. i X. Bog. Den tør imidlertid være yderligere udviklet i den alexandrinske Skole, ikke mindst under sin Anvendelse paa Udviklingen af Keglesnitslæren, og i APOLLONIOS' egen Haand under Udarbejdelsen af hans Værk, der efterhaanden forelagdes hans Disciple i noget forskellige Udgaver.

Den Nøgle, som jeg saaledes mente at have til en virkelig Forstaaelse af APOLLONIOS, laa det ikke fjernt at prøve, og det viste sig, at den lukker op overalt. De Bestemmelser af Keglesnittene, som man gik ud fra, er som nævnt de selv samme, som udtrykkes ved de Ligninger, hvorved man nu henfører Kurverne til ret- eller skævvinklede Koordinater. Denne Fremstilling lagdes forøvrigt nær ved den geometriske Algebras Brug af Rektangler eller i de almindeliggjorte Former af Parallelogrammer[1]); denne gav f. Ex. umiddelbart Ligningen $xy = ab$ for en af de Kurver, der bruges til Bestemmelsen af to Mellemproportionaler. Derved føres man til i de geometriske Omdannelser, hvorved APOLLONIOS i sit Værk kommer til nye Fremstillinger af Keglesnittene eller udleder Sætninger af saadanne Fremstillinger, at genkende de samme Operationer, som vi nu udtrykker i vort algebraiske Tegnsprog. Forskellen i Fremstillingsmidler, og ikke mindst Tilknytningen af de geometrisk-algebraiske Hjælpefigurer til selve den geometriske Figur, som er Undersøgelsens nærmeste Genstand, kan vel hidføre Afvigelser mellem de Veje, som den gamle geometriske Algebra følger, og dem, der falder Nutidslæseren naturligst; men Overensstemmelsen er dog bestandig saa stor, at for Nutidslæseren en Omskrivning til det algebraiske Tegnsprog, med hvis Brug han paa sin Side er fortrolig, vil være det bedste Middel til at følge de Tankeforbindelser, som har kunnet lede APOLLONIOS og været forstaaelige for Læsere, der har haft en tilsvarende Fortrolighed med de af ham benyttede geometrisk-algebraiske Hjælpemidler. Som det ses af Fortalen til HEIBERG's Udgave af APOLLONIOS, har man endog benyttet Kvadrater, Rektangler og andre Figurer, løsrevne fra den Figur, som udgør den foreliggende Undersøgelses Genstand, og ordnede paa en Maade, der skal udtrykke deres Proportionalitet, til i en Slags Tegnsprog at give de Beviser, som i APOLLONIOS' egentlige Tekst udtrykkes i Ord, en overskueligere og kortere Fremstilling, som nøje dækker Tekstens Fremstilling. Et saadant Hjælpemiddel har paa en Gang ligget nær og gjort god Nytte som Ledsager af en mundtlig Fremstilling.

APOLLONIOS' Tilknytning til EUKLID's Elementer viser sig altsaa ikke alene deri, at han overalt søger den logiske Støtte i disse og følger de samme Principer, men ogsaa deri, at hans Keglesnitselementer vidner om en fortsat Brug og videre Udvikling af de Færdigheder, som man allerede maa have haft nødig for at faa det fulde Udbytte af EUKLID's Værk. Det er gennem mit Studium af APOLLONIOS, at jeg for mit Vedkommende først har lært at vurdere disse Hjælpemidler og de gamles store Herredømme over deres rette og hensigtsmæssige Anvendelse.

---

[1]) I „Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité, et sur l'invention de cet instrument" Vid. Selsk. Oversigt 1888 har jeg tillige vist, hvorledes FERMAT's Koordinatgeometri fremkaldtes af de meget almindelige Bestemmelser af en ret Linie og af en Cirkel, som er bevarede af APOLLONIOS' „Plane Steder". Denne Tilslutning tyder paa, at der ogsaa paa dette Punkt — paa den græske Anvendelse af geometrisk-algebraisk Fremstilling nær — har været Overensstemmelse mellem APOLLONIOS' Hjælpemidler og den analytiske Geometri.

Naar den euklidiske Geometri kunde danne et saa godt og et saa umiddelbart Udgangspunkt for den videre Behandling af Keglesnitslæren, beror dette paa, at de af EUKLID strengt beviste Sætninger ogsaa omfatter dem, der ligger til Grund for den geometriske Algebras Operationer. Disse kunde man derfor indøve og videre anvende med fuld Tillid til Exaktheden af de derved vundne Resultater. Det samme gjaldt Anvendelser af Proportioner, idet de Sætninger, hvorpaa disse Anvendelser beror, i EUKLID V. var beviste i deres fulde Almindelighed. Her var altsaa Paalideligheden af selve Operationsmaterialet bevist. Saaledes forholdt det sig derimod ikke med de infinitesimale Sætninger, hvis Rigtighed bevises i EUKLID XII. Her føres kun exakte Beviser for Resultater, der forud var fundne ved intuitive Grænseovergange. Beviserne var tilmed saadanne, som nok kunde give Anvisning paa, hvorledes nye Resultater af samme Art skulde bevises, naar man først havde fundet dem, men anviste ikke Veje til at finde saadanne.

Hermed stemmer det, at man, som et Sted hos ARCHIMEDES (HEIBERG II. Bd. S. 264) synes at vise, overhovedet ikke før hans Tid var naaet til andre Resultater af denne Art end netop dem, som EUKLID beviser. Naar ARCHIMEDES selv naar langt videre paa dette Omraade, er det, som vi nu kan se af hans nyfundne Ephodos, først opnaaet ved Betragtninger af mere eller mindre intuitiv Art — eller dog saadanne, hvis Gyldighed ikke var bygget paa de euklidiske Principer — nemlig for en stor Del ved Laan fra statiske Sætninger, som endnu ikke var dragne ind under Omraadet af den som exakt anerkendte geometriske Bevisførelse. Efter at have fundet Sætningerne har ARCHIMEDES imidlertid selv givet Bevis for de af ham fundne infinitesimale Sætninger, som helt igennem er byggede paa den euklidiske Geometri og fuldt ud stemmer med de alexandrinske Fordringer. Dertil har nye Postulater været nødvendige, som definerer de Begreber, hvortil de nye Bestemmelser knytter sig. Af disse er de, der tjener til Bestemmelse af Begrebet: en plan krum Linies Længde, Udvidelser til krumme Linier af, hvad EUKLID har bevist i Sætningerne I, 20. og 21. om brudte Linier (se S. 76 (274)), og de tilsvarende Bestemmelser af Begrebet: en krum Flades Areal, er Udvidelser heraf. ARCHIMEDES beviser ogsaa almindelige Hjælpesætninger, som kan anvendes og af ARCHIMEDES er anvendte ved indbyrdes ganske forskellige Infinitesimalbestemmelser, nemlig saadanne, som i deres Anvendelser er ensgældende med dem, vi udtrykker ved

$$\int_0^x x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 \quad \text{og} \quad \int_0^x x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3.$$

Ogsaa selve de statiske Sætninger, som ARCHIMEDES efter sin Meddelelse i Ephodos i saa rigt Maal har anvendt til at finde de infinitesimale geometriske Sætninger, har han i sine statiske Skrifter underkastet en Behandling efter de Principer, der ligger til Grund for den euklidiske og dertil knyttede alexandrinske Mathematik. At dette er sket, efter at han havde gjort de her nævnte geometriske Anvendelser, og vel endogsaa efter at han har skrevet Ephodos, kan man bl. a. slutte af, at han i Fortalen til dette Skrift tager Afstand fra at betragte Anvendelsen af statiske Sætninger som (exakt-geometriske) Beviser. Desuden er det Omraade, som han naar at behandle i de bevarede Bøger om plane Figurers Ligevægt, langt fra at strække sig til alle de statiske Sætninger, som han efter Ephodos har benyttet; saaledes kender vi intet Bevis af ARCHIMEDES for Bestemmelsen af Tyngdepunktet i en Pyramide, hvoraf han dog gør vigtige Anvendelser. Han kan imidlertid let have fundet den i Tilslutning til sine øvrige statiske Kundskaber. De Forudsætninger, som ARCHIMEDES i 1. Bog om plane Figurers Ligevægt lægger til Grund for sin strengt synthetiske Behandling af dette Emne, bærer iøvrigt, ganske som Forudsætningerne for den euklidiske Geometri, Præget af at være uddragne ved Analyse af Sætninger, der omvendt i selve Skriftets synthetiske Behandling rationelt udledes deraf. Disse er nemlig for en Del saadanne, hvortil man fra først af maa være kommen ved praktiske Erfaringer, forbundne med mere skønsmæssige Ræsonnementer, og som ARCHIMEDES nok tør antages at have prøvet ved Forsøg. Saadanne Sætninger findes i 1. Bog, og den rationelle Behandling har dernæst ført til de i 2. Bog og i det hydrostatiske Skrift fundne Resultater.

I de store Fremskridt, som skyldes ARCHIMEDES, finder vi saaledes en Bekræftelse af den sædvanlig gældende Lov, at saadanne først findes ad mere eller mindre intuitiv Vej, medens den rationelle Behandling og særlig dens Optagelse som Udvidelse af et forud bygget rationelt System først følger senere. At ARCHIMEDES ad denne Vej er ført til sine allerbetydeligste Opdagelser, fremgaar som nys bemærket af hans Ephodos; men dette Skrift giver os tillige Oplysninger om de Betragtninger, han har fulgt for dernæst at komme til de som exakte anerkendte, geometriske Beviser, som findes i hans andre Skrifter. I Benyttelsen af disse Oplysninger var der dog nogen Usikkerhed i den Kommentar, som jeg i Bibliotheca Mathematica 6^3 føjede til J. L. HEIBERG's Oversættelse af det nævnte Skrift. Den rette Forstaaelse af flere Punkter beror nemlig paa det Tidspunkt, paa hvilket Ephodos er skrevet og sendt til Alexandria. Tidligere var jeg tilbøjelig til med HEIBERG at antage, at dette var gaaet forud for Sendingen af ARCHIMEDES' exakt-geometriske Behandlinger af de samme Emner; kun til allersidst berører jeg, at nogle historiske Vanskeligheder vil falde bort, hvis det modsatte har været Tilfældet. Nu har senere KIERBOE og F. ARENDT (Bibliotheca Mathematica 14^3) væsentlig ved Benyttelse af de sukcessive Ændringer i ARCHIMEDES' Terminologi paavist, at Ephodos maa være yngre end Skrifterne om Parablens Kvadratur, om Kuglen og Cylindren og om Konoider og Sfæroider, og denne Antagelse lader sig bringe i god Overensstemmelse med, hvad man finder i ARCHIMEDES' Fortaler og i Ephodos. I dette Skrift meddeler han dels, hvorledes den deri benyttede mekaniske Fremgangsmaade først havde ledet ham til Kendskabet til de allerede i de nævnte Skrifter fremførte Hovedresultater, som han dernæst i dem har bevist paa en med de euklidiske Krav stemmende Maade, dels viser han, hvorledes den samme Fremgangsmaade har ført ham til de to nye Resultater, og for disses Vedkommende tilføjer han den exakte Begrundelse; derigennem lader han se, hvorledes han ogsaa kan være kommen til de exakte Begrundelser af de foregaaende Resultater, som findes i hans tidligere Skrifter. Af den første Del erfarer man tillige, at Bestemmelsen af Kuglens Overflade oprindelig er funden som et Tillæg til Bestemmelsen af dens Rumfang, medens han i Skriftet om Kuglen og Cylinderen omvendt begynder med Kuglens Overflade.

Hvad nu angaar Fremkomsten af de exakte geometriske Beviser, ses det af Fortalerne, at det for Sætningen om Parabelsegmenter først er sendt til Alexandria, nemlig efter ARCHIMEDES' Ven KONON's Død til DOSITHEOS. Her meddeler ARCHIMEDES undtagelsesvis først den i Ephodos omtalte mekaniske Udledelse, men giver ogsaa denne en exakt Form, fraset Benyttelsen af mekaniske Forudsætninger, som vistnok da endnu ikke havde faaet en fuldt anerkendt videnskabelig Begrundelse. I det geometriske Bevis benyttes under en exakt Form, der stemmer med EUDOXOS' Forudsætning, Summation af uendelige Kvotientrækker. Om de øvrige Emner havde ARCHIMEDES allerede sendt KONON en kort foreløbig Meddelelse, hvilken han senere omtaler i Indledningen til Skriftet om Spiralerne (II, S. 2—4). Hvad *Kuglen* angaar, stilles i denne Meddelelse de fleste af de Opgaver, som behandles i 2. Bog om Kuglen og Cylinderen, efterfulgt af to urigtige Sætninger, som han i samme Bog meddeler i den rigtige Form. Han siger, at han selv, da han sendte KONON disse Sætninger, endnu ikke havde tilendebragt Undersøgelsen deraf, men vilde prøve om de, der paastaar at finde alt, men intet beviser, vilde forsøge at tilegne sig de urigtige Sætninger. Da den første af de KONON meddelte Opgaver er den at konstruere et plant Areal ligt Overfladen af en given Kugle, er han maaske allerede den Gang ifærd med at stille Bestemmelsen af Overfladen forud for Bestemmelsen af Rumfang. Af Ephodos ved vi, at ARCHIMEDES da selv var i Besiddelse af de Sætninger, som skulde bruges ved Løsningen af de i Brevet til KONON stillede Opgaver; men, som han i Indledningen til 2. Bog om Kuglen og Cylinderen (I, S. 168) siger som Svar paa DOSITHEOS' Spørgsmaal om disse Opgaver, kræver deres Besvarelse Kendskabet til de Sætninger om Kuglen, hvis Beviser han, som han siger i Indledningen til 1. Bog, der indeholder disse, først havde udarbejdet efter Brevet til KONON og Skriftet om Parabelsegmentet (I, S. 2,6: *ὕστερον δὲ ἡμῖν ὑποπεσόντων θεωρημάτων ἀξίων λόγου πεπραγματεύμεθα περὶ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.*). At han ved Slutningen af den samme Fortale saa levende beklager, at KONON, paa hvis Dom han satte saa stor Pris, netop ikke fik set dette Skrift (I, 4,14-17), viser dels (ligesom den bekendte Figur paa hans Gravmonument), hvor tilfreds han selv var med den fuldendt skønne Behandling, som det nu var lykkedes ham at give af den Viden, som han ifølge Ephodos først havde erhvervet ad helt andre Veje, dels kunde det tyde paa, at han selv paa et tidligere Stadium af sine Undersøgelser har drøftet dette Emne med KONON. De Forhandlinger med KONON, hvorigennem ARCHIMEDES har lært at sætte Samarbejdet med ham saa højt, kan maaske have fundet Sted paa Sicilien, hvor KONON har observeret. Det ligger da nær at antage, at han netop gennem KONON er bleven opmærksom paa de Krav, som man i Alexandria stillede til den formelt korrekte Behandling af Infinitesimalspørgsmaal, og som ARCHIMEDES derefter har opfyldt i en elegantere Form end nogen anden. Om ARCHIMEDES før Brevet til KONON iøvrigt har haft Lejlighed til at meddele andre Alexandrinere noget af de senere i 1. Bog beviste Resultater og saaledes dog givet dem en Nøgle til Løsning af de i dette Brev stillede Opgaver, ved vi ikke; de Snarer, han lægger ved de to tilsendte urigtige Sætninger (om Emner, som han dog selv ikke da fuldstændig havde undersøgt) kunde tyde paa, at tidligere Meddelelser fra hans Side kan have givet ham Anledning til bitre Erfaringer.

Naar ARCHIMEDES atter i Indledningen til Skriftet om Spiralerne vender tilbage til sit Savn af KONON, hvem de stillede Opgaver og Meddelelsen af ubeviste Sætninger sikkert vilde have givet saa mange gode Impulser, hvis han havde levet længe nok, behøves herved ikke særlig at tænkes paa de til KONON meddelte Sætninger om Spiraler, for hvis Beviser han først nu gør Rede. Savnet udtales jo i Forbindelse med alle de i Brevet omtalte Emner, som han netop rekapitulerer i Indledningen til dette Skrift. Han kan saaledes tænke paa Kuglen ligesom i Indledningen til Skriftet om Kuglen og Cylinderen eller paa Konoider. Meddelelsen til KONON indeholder dog tillige Hovedsætningerne om Spiralerne, og da ikke ogsaa disse kan være fundne ved hans mekaniske Methode, har han vistnok allerede den Gang brugt de førnævnte integrallignende Bestemmelser, selv om han først i Skriftet om Spiralerne har givet dem en exakt Formulering og Begrundelse.

De samme Operationer har han haft Brug for i de geometriske Beviser for de tidligere ved den mekaniske Methode fundne Sætninger om Konoider og Sfæroider. For Sætningen om Omdrejningsparaboloidens Volumen har han vistnok allerede besiddet et rent geometrisk Bevis, da han i sin Tid meddelte den til KONON. Derimod ser man af Begyndelsen af Fortalen til Skriftet om Konoider og Sfæroider, der sendtes til Alexandria senere end det om Spiralerne, at han havde holdt det tilbage, fordi han vilde have mere med, nemlig de ham ligeledes ad mekanisk Vej bekendte Sætninger om Hyperboloider og Ellipsoider. Disse, hvad der her maa sige: deres exakte geometriske Beviser, har nemlig voldt ham en Del Vanskeligheder (I 246,7). Naar vi bemærker, at Bestemmelsen af Rumfang af deres Segmenter beror paa Integrationer af Formen $\int (px \pm qx^2)\, dx$, og ARCHIMEDES allerede i Skriftet om Spiraler havde vidst at udføre saadanne, som afhænger af $\int x dx$ og $\int x^2 dx$, kan dette vække nogen Forundring; men af selve Skriftet om Konoider og Sfæroider ser vi, hvorledes de Former, hvorunder Bestemmelserne frembyder sig trods den iøjnefaldende Overensstemmelse med Integration, dog ikke umiddelbart giver de Forbindelser, som Fremstillingen ved Integraler nu giver os Anvisning paa [1]).

Hvad her er sagt, giver en Forestilling om, hvor stort et Arbejde der var fornødent for at naa fra den ad mekanisk Vej erhvervede Viden om de vigtigste Sætninger om Parabelsegment, Kuglen og Konoider og Sfæroider til den elegante Gennemførelse af de exakte geometriske Beviser, med hvilke ARCHIMEDES forelægger dem i en Fremstilling, der slutter sig nøje til den euklidiske Geometri. Denne Udarbejdelse har da ogsaa krævet Tid; thi i Fortalen til Skriftet om Spiralerne

---

[1]) Herom gives nærmere Oplysninger i Keglesnitslæren i Oldtiden. XX. Afsnit.

(II,2,13) siger han, at der ved dette Skrifts Fremkomst var gaaet mange Aar siden KONON's Død, et Tidsrum, som kun udgør en Del af det, som den nævnte Udarbejdelse har krævet.

Denne Udarbejdelse har da ogsaa omfattet to Ting, nemlig dels en Udstykning af den Størrelse (Areal eller Rumfang), som det gjaldt om at bestemme, i Dele, der danner en konvergent uendelig Kvotientrække eller en summabel Sum af uendelig smaa Størrelser (Integral), dels en exakt Begrundelse af disse Summationer uden direkte Brug af uendelig Deling, men vel en Deling i tilstrækkelig mange Dele, til at Sætningen kan bevises ved en reductio ad absurdum. Det første har maattet foretages paa forskellig Maade for de forskellige Spørgsmaal, og samtidig maatte ARCHIMEDES finde de til de foreliggende Opgaver tjenlige Summationer (Integrationer). Heri har den egentlige Vanskelighed ligget; men at ARCHIMEDES har holdt den endelige Udarbejdelse i den krævede exakte Form ud herfra, kan man se af den Maade, hvorpaa han i Ephodos gør dette i det mindste ved den af de i dette Skrift behandlede nye Opgaver, om hvilken tilstrækkeligt er bevaret i det af HEIBERG fundne Manuskript. Foruden at føre til de interessante nye Sætninger er Skriftets Formaal jo nemlig at vise den mekaniske Fremgangsmaade, ved hvilken han ogsaa har fundet sine ældre Sætninger; ved da tillige at vise, hvorledes han naar til en exakt geometrisk Begrundelse af de nye Sætninger, oplyser han ogsaa, hvorledes han for de ældre Sætningers Vedkommende har kunnet gaa over fra den mekaniske Begrundelse til den exakt geometriske.

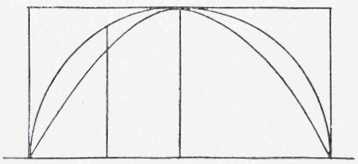

Fig. 15.

Nu ser vi ham i Ephodos først i 12. og 13. (II, S. 484 ff.) anvende sin mekaniske Methode til at finde Rumfanget af en Cylinderhov, begrænset af en Halvcirkel en paa denne staaende ret Cylinderflade og en Plan gennem den Halvcirklen begrænsende Diameter: naar Halvcirklens Radius er a, og Planen paa den Frembringer i Cylinderen, som ligger længst fra Diameteren, afskærer Stykket b, bliver dette Rumfang Trediedelen $\frac{2}{3}a^2b$ af Prismet med Højden b og med det Halvcirklen omskrevne Rektangel $2a \cdot a$ til Grundflade. Det bedste Overblik over, hvorledes ARCHIMEDES dernæst i 14. forbereder og i 15. gennemfører det exakte geometriske Bevis, faas ved en Sammenligning med den moderne Bestemmelse af Rumfanget v ved Integralet

$$v = \frac{1}{2}\, b \int_{-a}^{+a} \left(a - \frac{x^2}{a}\right) dx.$$

Her er (Fig. 15) den givne Diameter $2a$ tagen til Abscisseaxe i et retvinklet Koordinatsystem. Det ved Abscissen x bestemte Snit i Cylinderhoven er da $\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(a^2 - x^2\right)$. Denne algebraiske Bestemmelse har ARCHIMEDES udtrykt under geometrisk Form ved at tegne Parablen $y = a - \frac{x^2}{a}$, som har Diameteren til Korde og samme Toppunkt som Halvcirklen. Snittet i Cylinderhoven bliver da $\frac{1}{2}by$, eller som ARCHIMEDES siger: denne Trekant forholder sig til den Trekant $\frac{1}{2}ab$, som paa samme Plan afskæres ved et tresidet Prisme a^2b med Grundfladen $\frac{1}{2}ab$ og Højden $2a$, som Parabelordinaten y til a. Da i denne Proportions Forhold Efterleddene er konstante, kan ARCHIMEDES derpaa anvende Sætning 1. i Skriftet om Konoider og Sfæroider, som han tillige paany anfører som forudkendt Hjælpesætning i Ephodos (II S. 434), og deraf slutte, at Summen af alle Snittene i Cylinderhoven, det er den Størrelse, vi kalder $\int_{-a}^{a} \frac{1}{2} bydx$, eller selve Cylinderhoven forholder sig til Summen af alle Snittene i Prismet, der er dette selv eller a^2b, som alle Parabelordinaterne $\left(\int_{-a}^{a} ydx\right)$, altsaa Parabelsegmentet, forholder sig til alle Ordinaterne a eller Rektanglet $2a^2$. Da nu ARCHIMEDES tidligere har fundet, at Parabelsegmentet er to Trediedele af dette Rektangel, kan han derved bestemme Cylinderhovens Rumfang.

Den Maade, hvorpaa han anvender sin paa to Steder anførte Hjælpesætning, falder ganske sammen med en Anvendelse af CAVALLIERI's Sætning, hvilken denne betragter som intuitivt indlysende uden noget Bevis, og endnu LEIBNIZ begynder med at bruge den samme uklare Betegnelse af et Areal eller Integral som Sum af alle Ordinater eller $\int y$. ARCHIMEDES ser imidlertid i denne Udvidelse til uendelig mange Led ikke et Bevis, men et intuitivt Hjælpemiddel til at finde det Resultat, hvis Bevis han dernæst bringer i fuld Overensstemmelse med den eudoxiske Bevisførelse, som krævedes i Tilslutning til EUKLID's Anvendelser af denne. Derved bruger han vel den samme Hjælpesætning, men anvender den nu kun paa de endelige Antal af Figurer, indskrevne i og omskrevne om de Skiver og Strimler, hvori parallele Snit deler Cylinderhoven og Parabelsegmentet.

Paa denne Maade kunde man have bevist CAVALLIERI's almindelige Sætning og dernæst umiddelbart anvendt denne; men som sine Forgængere nøjes ARCHIMEDES med i hvert enkelt Tilfælde at føre det nøjagtige Bevis for den netop foreliggende Sætning. Det er et saadant Bevis, som han i Ephodos 15. har ført for Sætningen om Cylinderhoven. Dette træder klart frem trods store Lakuner i det foreliggende Manuskript. Hvad der er bevaret, stemmer nemlig saa nøje med den sædvanlige Form for en saadan Bevisførelse, at Lakunerne i Hovedsagen kunde lade sig udfylde næsten ordret.

Det er saaledes ikke blot den oprindelige mekaniske Udledelse af en stor Del af de vigtigste Resultater, der fremsættes i ARCHIMEDES' forskellige tidligere Skrifter, som vi lærer at kende gennem Ephodos; men Fremstillingen i dette Skrifts nye Undersøgelse af Cylinderhoven er tillige Paradigma paa den Udviklingsrække, som ogsaa andre Emner maa have været underkastede, inden han har fremstillet dem som fuldt beviste i sine øvrige Skrifter. Efterat han ad mekanisk Vej har fundet dem, vil han ogsaa have opsøgt en saadan infinitesimal Udledelse, som var egnet til at omdannes til den exakte Bevisførelse, som han i disse Skrifter alene forelægger sine Læsere. I Skriftet om Konoider og Sfæroider, hvori han benytter samme Hjælpesætning som i Ephodos, har han kunnet anvende den ganske som her, nemlig først under mere intuitiv Form til infinitesimale Beviser, som har tjent ham selv til Vejledning og dernæst under den paafølgende Udarbejdelse af de exakte Beviser, som Skriftet selv indeholder. Under lidt andre Former vil Beviserne i de andre Bøger være forberedt ved en foreløbig infinitesimal Betragtning. Dette ligger iøvrigt i Tingens Natur; men Ephodos bekræfter, hvad man kunde slutte af denne.

Ved saa udførlig at dvæle ved Archimedes og hans Forhold til den euklidiske Bevisførelse har jeg paa den ene Side tilfredsstillet en Trang til her at benytte de Oplysninger, som Ephodos har givet os, paa en fuldstændigere Maade, end dette var muligt, da jeg endnu ikke kendte Ephodos' kronologiske Plads blandt de af Archimedes udgivne Skrifter. Paa den anden Side oplyser den fra en ny Side den Overgang fra intuitiv Tilegnelse til rationel Begrundelse, som udgør Hovedemnet for nærværende Arbejde. Paa det nu betragtede Omraade ser vi dog hele denne Vej tilbagelagt af en enkelt Mand, Archimedes.

Ogsaa paa et andet Omraade har den euklidisk-alexandrinske Geometri vist sig egnet til at optage andre Emner end dem, for hvilke den oprindelig var bestemt, nemlig ved Dannelsen af Trigonometrien som Hjælpevidenskab til Astronomien. Denne var, som vi har set, som Sfærik gaaet forud for den egentlige Geometri i Behandlingen af vigtige stereometriske Spørgsmaal, men det er en Selvfølge, at Geometriens Udvikling og Tilføjelsen af en med tilsvarende Omhu behandlet Stereometri, saavel som den perspektiviske Anvendelse af Kegler til Fremstilling af de for Plangeometrien og dens algebraiske Anvendelser saa vigtige Keglesnit ogsaa maatte komme Sfæriken og Dannelsen af Hypotheser om Himmellegemers Bevægelse til Gode. Det er da ogsaa store Geometre som Eudoxos og Apollonios, der i disse Henseender spiller Hovedrollen. Men ved Siden heraf tilførtes der efter den alexandrinske Tids Begyndelse den astronomiske Bestemmelseskunst et helt nyt Omraade, da man med den tidligere indirekte Bestemmelse af Vinkler ved Forhold mellem Linier, fremstillede ved Projektioner og andre geometriske Konstruktioner, forbandt direkte Vinkelmaalinger. Disses Fremstilling i Grader, Minuter og Sekunder viser deres østerlandske Oprindelse. Nu gjaldt det om at beregne Tal, som udtrykker disses Forbindelse med de Forhold, man tidligere anvendte, først og fremmest Kordetavler. Her maatte Geometrien yde sin Bistand. At denne ifølge den Udvikling, som Euklid havde givet den, kun indeholder de aldeles præcise Sætninger, medens Kordeberegningen kun kan ske med Tilnærmelse, kunde ikke være nogen Hindring herfor, da man ved Siden heraf i Logistiken og Metretiken lærte at anvende de geometriske Sætninger ogsaa paa Spørgsmaal, der kun kunde besvares tilnærmelsesvis. At man ogsaa kunde give denne Anvendelse en aldeles exakt Form, havde Archimedes vist ved sine Beviser for, at Længden af en Cirkelperiferi ligger mellem præcist opstillede Grænser, og hans Exempel ser vi Ptolemaios følge i sin Kordeberegning. Nu stilledes der imidlertid Krav til en langt større Frihed i den numeriske Beregning, og at Grækernes egen Regnekunst ikke var tilstrækkelig udviklet dertil, men at de ogsaa i den Henseende maatte tage Lære af Babylonierne, viser Brugen af 60-Delingen ikke blot til Vinkelmaaling, men ogsaa ved Udregningen af Korder i Sexagesimalbrøker og overhovedet til Udførelse af større Regninger.

Hvad angaar Tabellernes Anvendelse paa astronomiske Spørgsmaal, har man, som det fremgaar af PTOLEMAIOS' Analemma[1]), fra først af knyttet deres Brug til de samme Forhold mellem Linier, som benyttedes ved de ældre geometrisk-mekaniske Bestemmelser; men MENELAOS gav den sfæriske Geometri en saadan Udvikling, som egnede sig til en mere direkte Anvendelse af Kordetavlerne til Storcirkelbuers Bestemmelse ved hverandre. Vi har allerede peget hen paa den Tilslutning, som Sætningerne om sfæriske Trekanter i hans første Bog har til Sætningerne om plane Trekanter i EUKLID's I. Bog, og de Sætninger, som han opstiller i III. Bog, og som i Middelalderen og ind i den nyere Tid i en efterhaanden mere udviklet Skikkelse er lagt til Grund for sfærisk-trigonometriske Beregninger, er fremkomne ved Udvidelse af plangeometriske Sætninger, som efter PAPPOS har været at finde i EUKLID's Porismer.

Jeg har i Keglesnitslæren i Oldtiden (XXII. Kap.) omtalt Grundene til den græske Geometris Forfald og skal her kun berøre en af disse, som knytter sig nøje til, hvad vi har sagt om den euklidiske Geometri. Efterat man i Keglesnitslæren og nogle andre naturlige Udvidelser havde anvendt den paa Undersøgelser, for hvilke den fra først af var bestemt, og da den ikke mere fik helt nye Impulser som i sin Tid fra et Geni som ARCHIMEDES, og man tilmed forsømte at følge dennes Impulser, og da ikke nye Opgaver blev paalagt den som de, der hidrørte fra Fremskridtene i Astronomi, behandledes Geometrien som det færdige og afsluttede videnskabelige System, hvis Grundlag EUKLID en Gang for alle havde opført. Af nye Anvendelser gjorde man væsentlig kun saadanne, som passede ind i Systemet, ikke saadanne, som paa nogen væsentlig Maade kunde udvide det. Man blev saa optaget af at kommentere de af EUKLID og hans store Efterfølgere anvendte Former og vise disses videnskabelige Værdi, at man ganske forsømte at bruge dem til at faa noget nyt frem. Selve Kommentarerne, som vi finder dem hos PAPPOS, PROKLOS, EUTOKIOS o. fl., indeholder heller ikke nye theoretiske Betragtninger af synderlig Interesse; at de dog har saa stor historisk Værdi, hidrører fra de Oplysninger, som de indeholder om de store Forgængeres Arbejder. De paalideligste af disse ydes gennem de direkte Uddrag af ældre Forfattere, som altsaa ikke alene bygges paa en mere tilfældig Overlevering, forplantet gennem Aarhundreder, i hvilke den maatte betydelig afsvækkes. Dog vidner den blotte Fremkomst af saadanne Kommentarer om en fortsat, om end aftagende Forstaaelse navnlig af EUKLID's Elementer, hvis Sætninger man stedse tog til Udgangspunkter. For virkelig at kunne holdes i Live maatte denne Forstaaelse ikke indskrænke sig til en abstrakt logisk

[1]) Se min Afhandling: *Sur la trigonométrie de l'antiquité*, Bibliotheca mathematica 1^3, 1900.

Tilegnelse af de videnskabelig ordnede Sætninger, men maatte vedblivende være forbunden med Fortrolighed med deres mere praktiske Anvendelser ogsaa dem, som vi har kaldt algebraiske. Denne har været holdt vedlige ved Øvelser i Metretik og Logistik, og den voksende Regnefærdighed, som vi nys omtalte i Forbindelse med Astronomien, er kommen den tilgode. Den lægger sig for Dagen i Heron's Arbejder, særlig i hans genfundne Metrica, og hos Diophant træffer vi en større Fortrolighed med rent algebraiske Operationer og tilhørende numeriske Udregninger, end de bevarede Skrifter har tilladt os direkte at paavise hos de gamle Alexandrinere, om end, som vi har vist, meget tyder paa, at de ikke var dem fremmede, ja at den videnskabelige Begrundelse af deres Udgangspunkter hørte med til Formaalet for den græske Geometri. Der vedblev saaledes ogsaa at være Betingelser for senere Opblusninger af denne; en saadan synes f. Ex. at have knyttet sig til de Anvendelser, som Opførelsen af Sophiakirken i Konstantinopel krævede. En Fortsættelse har om end i aftagende Grad fundet Sted i det østromerske Rige, hvorfra man derfor i Renæssancen kunde hente de vigtigste af de Skrifter af de gamle store Forfattere, som vi nu kender.

Helt anderledes gik det Romerne. Deres Landmaalere anvendte fra først af etruskiske Regler, som fik Lovkraft uden nøjere mathematisk Prøvelse. De tilsattes vistnok med græske Regler baade de gamle fra den føreuklidiske Tid eller Ægypterne og vistnok ogsaa saadanne, som er paavirkede af den euklidiske Geometri. Det tør antages, at græske Haandværkere og Ingeniører med nogen mathematisk Dannelse har haft en stor Andel i de udmærkede Ingeniørforetagender, som udførtes under Romerväldet. Af dem har vel ogsaa Romere lært de Regler, som man anvendte; men naar disse uden nogen saadan mere intuitiv Baggrund, som Grækerne besad før Euklid, henvistes til hans videnskabelige Værk for deri at finde Kilden til og Sammenhængen i disse mekanisk lærte Regler, savnede de Betingelserne for med Frugt at gaa denne Vej. De kunde ingen Sans have for den videnskabelige Finhed, hvormed han besejrer eller omgaar logiske Vanskeligheder, saalænge de ikke havde vundet tilstrækkelig Fortrolighed med Tingene selv til at kunne forstaa, hvori de Vanskeligheder bestod, hvormed man gjorde sig saa stort Besvær. Og til at lære det ene og det andet at kende gennem selve Euklid's videnskabelige Behandling, dertil savnede man ganske den Taalmodighed, som kun kan findes hos den, der som Euklid og hans platoniske Forgængere har vundet Interesse for Mathematiken for dennes egen Skyld. Grelt træder denne Mangel paa Evne til en rigtig Forstaaelse frem, naar man brugte Udgaver med Euklid's Sætninger, men uden Beviserne. I den saaledes fremkommende Række Sætninger findes vel saadanne, som egner sig til de praktiske Anvendelser, som ene kunde interessere Romerne; men et Flertal af Sætningerne i det euklidiske System er væsentlig bestemt til i dette selv at danne det videnskabelige Grundlag for de andre, og vi har set, i hvor høj Grad Ordningen af Sætningerne er beregnet herpaa; uden det forstaas den ikke.

Den Paavirkning, som den yngre indiske Mathematik har faaet af den græske, indskrænker sig til Optagelse af Resultater, som man har føjet til, hvad man selv forud vidste, og dernæst behandlet paa samme Maade som dette. Om nogen Indflydelse fra EUKLID's rationelle Behandling bliver der altsaa ikke Tale.

Det helt omvendte gælder om Araberne eller om de Folkeslag under arabisk Herredømme, hvis Mathematik man under et betegner som den arabiske. Nogle af disse, navnlig Syrerne, var forud i Besiddelse af græsk Dannelse, som ogsaa maa have omfattet nogen Mathematik. Om end væsentlig paavirkede af astrologisk Overtro fik deres arabiske Herskere tidlig en Interesse for Astronomien, der i Aarhundreder paa forskellige Steder og under forskellige Dynastier gav Anledning til en rundhaandet Understøttelse. Astronomiens mathematiske Behandling hos Grækerne medførte, at Overleveringen og videre Udvikling af den græske Mathematik fik en væsentlig Andel i denne Støtte. EUKLID oversattes allerede under Abbassiderne samtidig med PTOLEMAIOS, og saavel Formaalet med Oversættelsen som de Dele af den undertvungne Befolkning, hvorfra den udgik, maatte sikre imod, at Tilegnelsen af EUKLID indskrænkede sig til den abstrakt logiske, som paa sin Side ikke forsømtes. Sammen med Tilegnelsen af EUKLID's strenge Theori lærte man at bruge de deri indeholdte algebraiske Operationer. Disse traadte udtrykkelig frem i den tidlig oversatte Diophant; men baade han og tabte græske Forfattere kan forud have været kendt i sin græske Form af dem, der i Litteraturen træder os i Møde som Arabere. Ad denne Vej er i Nutiden paa flere Punkter vort Kendskab til den græske Mathematik vokset ud over det Maal, som var naaet ved at øse direkte af græske Kilder. I hvor god Besiddelse man tidlig kom af de græske geometrisk algebraiske Operationer, ses af det Skrift af AL-CHWĀRIZMĪ, som har givet Algebraen sit Navn. Der er vel en af de Former for Løsning af Ligningen af 2. Grad, som han anvender, der ikke forekommer hos EUKLID; men ogsaa denne har samme geometriske Natur som EUKLID's[1]).

Paa denne Maade kom Araberne baade i Besiddelse af de strengt videnskabelige Principer, som giver sig Udtryk i EUKLID's Elementer, og til Forstaaelse af, hvorledes de i dette Værk beviste Sætninger kan anvendes baade praktisk og til videregaaende videnskabelige Undersøgelser. Tilslutningen til de græske videnskabelige Principer træder særlig stærkt frem hos OMAR AL CHAIJĀMĪ, der kun vil anerkende Regninger med irrationale Størrelser i den af Grækerne anvendte Omskrivning til geometriske Operationer eller til Proportioner. Frugtbarere bliver den langt friere Behandling af saadanne Størrelser, som AL-KARCHĪ tillader sig, skønt ligeledes han bøjer sig for de græske Læremestre. Hvor godt Araberne havde tilegnet sig den hele euklidiske Geometri, det viser den Forstaaelse af den derpaa byggede

[1]) Efterat P. TANNERY har vist, at allerede DIOPHANT anfører de Regler, hvis arabiske Benævnelse har givet AL-CHWĀRIZMĪ's Bog og derefter Algebraen sit Navn, ved jeg ikke, hvorpaa P. BOUTROUX vil støtte den — iøvrigt gamle — Antagelse, at der med denne Forfatter begynder en ny, fra den græske væsentlig forskellig, arabisk Algebra (P. BOUTROUX: *Les Principes de l'Analyse Mathématique, exposé historique et critique*, I, Paris 1914).

Keglesnitslære, hvorom deres Udgivelse af APOLLONIOS' Keglesnit vidner; dette Værks V.—VII. Bog er kun kommen til os gennem dem. Med den græske Anvendelse af Keglesnit til Løsning af Opgaver, der afhænger af Ligninger af tredie Grad, viser de sig ogsaa fortrolige, om de end i Realiteten i de Skrifter, vi kender, ikke er kommen ud over, hvad Grækerne havde naaet. Et betydeligt Fremskridt har AL-HAITAM derimod gjort i Infinitesimalundersøgelser, idet han, under en lignende Form som den, hvorunder ARCHIMEDES behandler Integralerne $\int x dx$ og $\int x^2 dx$, benytter en med $\int_0^x x^4 dx = \frac{1}{5}x^5$ ensgældende Sætning, særlig til Kubatur af det Legeme, som senere FERMAT kaldte sin egen Konoide, efter at han havde bestemt dens Rumfang paa samme Maade som AL-HAITAM [1]). At iøvrigt Arabernes Fremskridt væsentlig gjordes i Trigonometrien, var en naturlig Følge af den Forbindelse, hvori deres Mathematik stod med Astronomien.

Ved Middelalderens Begyndelse modtog de vesteuropæiske Folk kun den mangelfulde Mathematik, som Romerne besad. Brudstykker af EUKLID som en Forfatter, for hvem man havde en vis Ærefrygt, fulgte med, men alle Betingelser for at faa videre ud af Læsningen savnedes foreløbig. Først efterhaanden kom saadanne væsentlig fra Araberne og tilegnedes da ogsaa lidt efter lidt med Flid af de nye og friske Folkeslag, og de kom i en dobbelt Skikkelse. Dels trængte de mathematiske Færdigheder, som er saa vigtige for en frugtbar Tilegnelse af Mathematiken ind, først den indisk-arabiske Regnekunst og senere tillige den algebraiske Kunst, som Araberne, som sagt uden væsentlige reelle Fremskridt fra Grækerne, havde givet en større Selvstændighed blandt andet i Tilslutning til DIOFANT ved visse faste Betegnelser for de forskellige Potenser af den ubekendte og ved Tilløb til et Tegnsprog. Dels var der fra Araberne kommen en rent videnskabelig Interesse, som gav sig Udslag allerede paa en Tid, da baade den arithmetiske og navnlig den algebraiske Færdighed endnu kun var meget lidet udviklet idet mindste i de her paagældende gejstlige Universitetskredse. Vi tænker særlig paa Skolastiken i det XIII.—XIV. Aarhundrede, om hvis mekaniske og mathematiske Arbejder DUHEM i sine udførlige Skrifter, særlig i de tre Bind om *„Leonard de Vinci, ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu“*, der fremfor alt drejer sig om *„ceux qu'il a lus“*, giver saa udførlige og grundige Oplysninger, hvis fulde Paalidelighed godtgøres ved Uddrag af de skolatiske Forfattere selv. Disses Interesse optoges vel væsentligst af den aristoteliske Filosofi og dens videre Behandling ved senere græske og arabiske Forfattere. Selv medbragte de tillige Forudsætninger, vundne gennem den kristne Kultur, der jo ogsaa paa sin Side ved AUGUSTIN og andre Kirkefædre havde optaget

---

[1]) Dette finder jeg saa meget mere Anledning til at bemærke her, som jeg i min Artikel i *Kultur der Gegenwart* III, 1. Bd., der udkom kort før H. SUTER's Udgivelse af AL-HAITAM's Arbejde (i Bibliotheca mathematica 12.[3]) siger S. 61, at „ARCHIMEDES' Infinitesimalundersøgelser slet ikke blev fortsat i Middelalderen“. For Arabernes Vedkommende har dette altsaa vist sig at være urigtigt.

meget af den gamle græske Kultur. De fandt derfor ogsaa rigelige Tilknytningspunkter ej blot for Tilegnelse, men ogsaa for en frugtbar Kritik af de aristoteliske Lærdomme og kunde under denne støtte sig til hans egne logiske Regler. Det var netop Tankens egne Love, de greb og udviklede og forstod at benytte paa en sikker, ofte subtil Maade; men de besad langt mindre Kendskab til alt, hvad der vedrørte selve Naturen og hele den ydre Verden, hvorpaa disse Love skulde anvendes. Efter alt, hvad vi i dette Skrift har sagt paa den ene Side om EUKLID's Elementers og den derpaa byggede græske Mathematiks rent rationelle Karakter, paa den anden Side om de geometriske og algebraiske Færdigheder, som maa indøves af den, der vil have det fulde Udbytte af Studiet af EUKLID, er det af stor Interesse at se, hvad Skolastikerne, der i saa høj Grad besad Interessen for rationelle Synsmaader, men var saa overordentlig lidt udrustede med de nævnte praktiske Færdigheder — hvori de samtidige italienske Handelskredse var naaet videre — kunde faa ud af Studiet af EUKLID.

Ja, noget stort Omfang naaede deres Kundskaber ikke, og at den blotte Tilegnelse af EUKLID's Lærdomme maa have forekommet ret vanskelig, kan man se af, at man, skønt CAMPANUS' latinske Udgave af hele EUKLID's Elementer forelaa fra Midten af det XIII. Aarhundrede, ved Universiteterne kun lærte faa af dens Sætninger med deres Beviser; men disse, som vel især var tagne af hans I. Bog, der jo ganske særlig er opført efter rationelle Principer, kunde nok give Indblik i, hvad et exakt Bevis er, og derved indøve den formelle Sikkerhed i Slutningerne, som ikke mindst overfor Spørgsmaal, der har en mathematisk Side, karakteriserer de ældre Skolatikere, om hvem vi her taler, selv om de kommer meget lidt ind paa mathematiske Enkeltheder. For dem, der vilde det, var der Lejlighed til at gaa videre i Studiet af EUKLID, og dette har da bidraget til den Klarhed og Nøjagtighed, hvormed mathematiske Begreber af en vis almindelig Natur opfattes og udvikles af de betydeligere Forfattere; paa flere Punkter naar disse Forfattere endog til Opfattelser og Resultater, som man ellers først tillægger Renæssancens Forfattere, der bedre forstod at sætte dem i Forbindelse med den haandgribelige Virkelighed.

Den abstrakt logiske Interesse træder allerede frem, naar CAMPANUS bemærker, at EUKLID X, 1. (se S. 102 (300)) hindrer i at sammenligne den Vinkel, som en Kurve danner med sin Tangent, med retlinede Vinkler. Bemærkningen kan maaske skyldes en arabisk eller græsk Forgænger; men at netop den drages frem, røber den theoretiske Interesse. Det samme kan siges, naar ROGER BACON, om end i Tilslutning til arabiske Kilder, beviser Umuligheden af at sammensætte de kontinuerte Størrelser af lige store Atomer ved at vise hen til Inkommensurabiliteten af Side og Diagonal i et Kvadrat. Kan end BACON saavel som JORDANUS NEMORARIUS og BRADWARDIN have Udgangspunkter for deres Bemærkninger om Forskellen paa kontinuerte og diskrete Størrelser fra ARISTOTELES og hans filosofiske Efterfølgere, røber dog deres Bemærkninger herom euklidisk Skoling, og en saadan maa i hvert Fald ligge bagved Skolastikernes sikre Kritik af det aristoteliske Uendelighedsbegreb. Denne Kritik stemmer fuldstændig med Principerne for den eudoxiske Grænseovergang, om end denne, saaledes som vi kender den hos Euklid, tjener til at omgaa det af ældre græske Mathematikere misbrugte Ord „uendelig", medens Skolastikerne bruger den til at forklare den saakaldte potentielle Uendelighed paa en fuldt ud tilfredsstillende Maade. Paa den anden Side træder det ringe Omfang af deres praktiske Kendskab til Mathematiken frem ved, at de idelig vender tilbage til det ene Exempel $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, det er: man kan gøre Leddenes Antal saa stort, at Summens Afvigelse fra 1 bliver mindre end enhver opgiven Grænse. De behandler disse Spørgsmaal med en saadan Klarhed, at Gregorius af Rimini fra dem endog hæver sig til det Begreb, som i vore Dage kaldes „transfinite" Størrelser.

Om en skolet mathematisk Tænkning vidner det ogsaa, naar Buridan — om end i Tilslutning til Johannes Philopon fra den senere Oldtid — sætter Inertiens Lov i Stedet for Aristoteles' Forklaring af Bevægelse. Efter denne skulde ikke Forandringer i Hastighed, men selve den øjeblikkelige Hastighed i hvert Øjeblik frembringes ved en Kraft. Buridan derimod tillægger et Legeme i Bevægelse en vis „Impetus", som paa den ene Side er ligefrem proportional med dets Masse, et Begreb, hvilket han forklarer omtrent som Newton, paa den anden Side afhænger af Hastigheden. Det er ved denne Impetus, som forandres ved en virkende, nedadgaaende Kraft, at han forklarer en opadgaaende Hastigheds Aftagen og en nedadgaaende Hastigheds Voksen. Hertil føjede Oresme den samme kvantitative Bestemmelse af den ved en jevnt voksende Hastighed gennemløbne Vej, som Galilei senere har genfundet og ved Forsøg vist Anvendelsen af paa Faldet. Som Galilei tager Oresme Tiden til Abscisse, Hastigheden til Ordinat, hvorved den gennemløbne Vej bliver Arealet af en Trekant. Det er denne Bestemmelse, som i Oresme's eget af Duhem fremdragne Manuskript: *Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum difformitatum* udgør Hovedanvendelsen af de deri beskrevne Koordinater. Den viser tillige, hvorledes disse knyttede sig til den hos Euklid forekommende geometriske Algebra, ligesom Menaichmos' og Apollonios' Anvendelser af Koordinater, som Oresme ikke kendte noget til. — Oresme var fortrolig med Bevægelsens Relativitet og antog i Henhold dertil Jordens Rotation om dens Axe. Hans Fremstilling andetsteds af en Potens med bruden Exponent slutter sig tydelig til Euklid's Fremstilling af Potenser ved Sammensætning af ligestore Forhold og har et Analogon i en lignende Brug, som Archimedes gør af Betegnelsen: et Forhold taget halvanden Gang. Sammen med denne klare Indtrængen i de gamles Begreber har Oresme som sine samtidige i den lærde Stand kun et lidet omfattende Kendskab til Mathematikens praktiske og numeriske Anvendelser. Dette udvider han dog selv ved beskedne Dannelser af uendelige Rækker, som han stiller ved Siden af den nys omtalte.

Den paa denne Tid i Europa fremadskridende Vækst af en fra Geometrien mere og mere løsreven Algebra og en ligeledes mere frigjort Trigonometri skulde dog snart aabne andre Veje til at komme ind i og trænge videre frem i Mathematiken end Euklid's Geometri, som man imidlertid samtidig lærte bedre og bedre at kende. Tilliden til de nye Midler, man fik at raade over, kunde vel ogsaa i

Renæssancen bringe enkelte som PETRUS RAMUS til med Oppositionen mod ARISTOTELES' Eneherredømme at forbinde en lignende mod EUKLID. En fejlagtig Oversættelse hos CAMPANUS af Def. 5. i EUKLID's V. Bog gav Anledning til at bebrejde denne en alvorlig logisk Fejl. Det ses dog f. Ex. af PELETARIUS' S. 72 (270) anførte Euklidudgave af 1557, at Fejlen var rettet, og at en rigtig Forstaaelse af Definitionen og dens Anvendelse var indtraadt. Forstaaelsen af EUKLID's Værk, som vedblev at være Udgangspunktet for ethvert alvorligt geometrisk Studium, maatte ogsaa styrkes ved det voksende Studium og den voksende Forstaaelse og Anvendelse af de andre græske Oldtidsskrifter. Gik man end selv frem ad mange andre Veje, maatte Sammenligningen med EUKLID og de Undersøgelser, som de gamle byggede paa hans Elementer, vise, at de nye Undersøgelser endnu ikke var naaet til samme logiske Sikkerhed. Man forstod og fremhævede, at Arithmetiken behandlede de diskrete, Geometrien de kontinuerte Størrelser, og anerkendte saaledes, at den paa Arithmetiken grundlagte Algebra endnu ikke havde fuld logisk Sikkerhed, naar de behandlede Størrelser var inkommensurable. Om denne Tids Værdsættelse af den fra Oldtiden nedarvede Geometri som den rette Indehaver af mathematisk Exakthed, naar Talen er om den almindelige Behandling af Størrelser, har jeg talt andetsteds[1]). Her skal jeg derfor kun minde om, at det er den, der bringer VIETA til at føje saakaldte geometriske Beviser til dem, han først fører ved Anvendelser af hans egne algebraiske Tegn. De Operationer, som disse udtrykker, er nemlig Regneoperationer og derved kun tænkt anvendte paa de Størrelser, med hvilke man kan regne, altsaa paa rationale Størrelser. Beviserne for de opnaaede Resultaters Almindelighed maa derfor støttes paa Geometrien, det vil sige paa den i EUKLID V. indeholdte almindelige Proportionslære. DESCARTES kommer herud over ved en Gang for alle at støtte Brugen af Tegnsproget paa nye almindeliggjorte Definitioner af de ved dette udtrykte Regneoperationer. Produktet $a \,.\, b$ er Fjerdeproportionalen til 1, a og b o. s. v. Det logiske Grundlag for Paalideligheden af disse Operationer bliver saaledes bestandig den eudoxiske Proportionslære.

Som før bemærket maatte Fortroligheden med EUKLID i Renæssancen vokse ved Studiet af ARCHIMEDES og APOLLONIOS, som aldrig satte rigere Frugt end i Begyndelsen af den nyere Tid. For en Del kunde det ske gennem deres Resultater, som man nu søgte selvstændig at begrunde og udvide. Det skete som hos KEPLER og CAVALIERI gennem Infinitesimalbetragtninger af en vis intuitiv Karakter; men netop saadanne var skikkede til at føre en selv og andre rask frem. Man saa deri, og er længe vedbleven dermed, helt nye Fremgangsmaader uden at bemærke, at de gamle maatte være gaaet gennem lignende Betragtninger, førend de naaede til at kunne opstille færdige Resultater og synthetiske Begrundelser af disse; ARCHIMEDES' Ephodos har leveret Beviset for, at han netop er gaaet denne Vej, og at

[1]) Se i Videnskabernes Selskabs Oversigt 1893 S. 330 ff. min Note III sur l'histoire des mathématiques: *Sur la signification traditionnelle du mot géométrique.* Jeg kan ogsaa henvise til: Om den historiske Udvikling af Mathematiken som exakt Videnskab indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede. Universitetets Festskrift til Kongens Fødselsdag. 1896.

særlig „Cavallieri's Sætning" allerede for ham var et Gennemgangsled til en Begrundelse, der tilfredsstillede ham som mere exakt. De Krav, som han saaledes stillede, og som tolkedes af Mænd som Maurolycus, blev fuldstændig forstaaet af Fermat, der bevarede den geometriske Form af Kvadraturer, ikke som et blot Hjælpemiddel til Anskuelighed, men som Vej til exakt Begrundelse. Lejlighedsvis gennemførte han den ved en exakt Grænseovergang, og i den Henseende fulgte Pascal o. fl. hans Exempel. Naar endvidere Mænd som Huygens og Newton viste en saa stor Forkærlighed for geometriske Begrundelser efter gammel græsk Mønster var det ingenlunde et formelt Liebhaveri, men en Viden om netop deri at finde det sikrest opførte Grundlag for en fuldt paalidelig Opførelse af deres egne nye Bygninger. Endnu Leibnitz henviste til, at de ved Brug af hans nye Algorithmer fundne Resultater kunde bevises exakt ved den antike Form for Grænseovergang (Exhaustionsbevis).

Ved Laan fra den euklidiske Geometri og Anvisning paa den græske Bevisførelse havde man saaledes dels sikret sig Almengyldigheden af de fra først af til Regning med rationale Tal knyttede moderne algebraiske Operationer, dels erkendt et Middel til at prøve Resultaterne af de nydannede infinitesimale Operationer. Saasnart man følte sig tryg paa dette Punkt, lod man sig imidlertid i det XVIII. Aarhundrede rive hen af disse Methoders egen store Frugtbarhed uden at sætte dem i Forbindelse med dette nedarvede Kontrolmiddel, og foreløbig uden at sætte noget andet i Stedet. Samtidig vedblev man dog i Euklid's Geometri at se det bedste Grundlag for et Studium idet mindste af Geometrien i snævrere Forstand; men det maatte svække Overblikket over det hele Værks Sammenhæng, at der var Dele af det i dette tilsigtede, som man nu tilegnede sig ad helt andre Veje end dem, som Euklid vil give et sikkert Grundlag. Tilbage blev Beundringen af de sikre Former for de enkelte Beviser, som f. Ex. lagde sig for Dagen i Wolff's Anvendelse af disse i sin Filosofi. Derved opretholdtes de Fordringer, som man siden Platon, Aristoteles og Euklid stillede til en virkelig rationel Begrundelse, og den Tid maatte komme, da man ikke kunde nøjes med en Henvisning — som man dog ikke fulgte — til fra et andet Omraade at søge Sikkerhed for Almengyldigheden af de algebraiske Operationer, eller med en forlængst glemt Henvisning til, at man kunde anvende de gamles Principer til enkeltvis at sikre de ved Infinitesimalmethoderne fundne Resultater. Foreløbig fandt man snarere Sikkerheden for disse i den indre Sammenhæng mellem den rige Fylde af de ved Methoderne vundne Resultater („læs videre — et la foi vous viendra"!). I det XIX. Aarhundrede har man derimod indenfor Algebraen selv søgt og fundet Sikkerheden for dens Almengyldighed og skaffet sig det samme sikre Grundlag for Differential- og Integralregning og uendelige Rækker. Efter Tingenes egen Natur maatte de anvendte Principer være de samme, som de gamle anvendte i deres Proportionslære og i de enkelte af dem foretagne Grænseovergange; derfor har vi ogsaa i vore Forklaringer heraf i XI. Kap. kunnet henvise til lignende Betragtninger i Nutiden. Disse er vel meget langt fra at være bevidste Efterligninger af dem, man kunde finde hos de gamle Forfattere; men de er blevne til i Hænderne paa Mænd, der havde tilegnet sig det Begreb om Kravet til mathematisk Exakthed, som først er gjort gældende af de gamle Grækere og forplantet til os ved EUKLID og dem, der er gaaet videre ad de af ham anviste Veje.

Overensstemmelsen med antike Betragtningsmaader blev dog ikke straks bemærket af de Mænd, der paa denne Maade konstruerede en sikker Underbygning for de fra det XVIII. Aarhundrede overleverede algebraiske og infinitesimale Methoder. Man har vistnok ofte anset de endnu tidligere Forgængere for delagtige i disses Svagheder og fra Anvendelsen af geometriske Anskueliggørelser af Differential- og Integralregning sluttet, at den antike Geometri heller ikke bragte mere end en saadan. Dette kan have været Tilfældet ogsaa med flere af dem, som nu søgte et solidere Grundlag for selve Geometrien, og som ikke altid bemærkede, i hvilken Grad deres interessante Undersøgelser var Skridt videre paa Baner, som EUKLID med fuld Bevidsthed havde betraadt. Jeg har flere Steder berørt, at de, som det var at vente, paa mange Punkter er kommen videre og har fremdraget Forudsætninger, som EUKLID har anvendt uden udtrykkelig at opstille dem som saadanne. Her skal jeg særlig fremhæve, at man har ført den Analyse, hvorved PLATON's Elever søgte at naa de mest oprindelige Forudsætninger, endnu længere tilbage end EUKLID. Det er en hel Række Forudsætninger, som han er naaet tilbage til og har opstillet i sine Postulater og tildels i sine Definitioner som Udgangspunkter for sin Lære; men for at den derpaa byggede Geometri virkelig skal være mulig, er det nødvendigt, at disse lade sig forlige indbyrdes. Sikkerheden herfor har EUKLID egentlig kun deri, at det er ved Analyse af den empiriske Geometri, der som empirisk maa være mulig, at han er kommen til dem. Deres Mulighed lader sig imidlertid godtgøre, naar man gaar ud fra et endnu længere tilbageliggende Udgangspunkt. Et saadant har man i det moderne almindelige Talbegreb (der da ikke som i EUKLID's V. Bog maa udledes geometrisk). Ved Kombination af to saadanne Tal som Koordinater og Anvendelse af den analytiske Geometris Bestemmelse af rette Linier og Cirkler danner man det, som HJELMSLEV i en Artikel i Nyt Tidsskrift for Mathematik 1917, A, S. 1, kalder den „arithmetiske" Plan. For denne gælder de euklidiske Postulater, som altsaa lader sig forene indbyrdes. Den saaledes bestemte „arithmetiske" Plangeometri, og paa lignende Maade en arithmetisk Stereometri, falder altsaa logisk sammen med den euklidiske og kan opbygges af de euklidiske Postulater (med nogle Supplementer). HJELMSLEV's egen „Geometri" er derimod empirisk, men strengt empirisk, idet man holder sig til de Erfaringer, som kan kontrolleres. Det, som vi nys og i Kap. VIII kaldte den empiriske Geometri, og hvoraf den euklidiske er dannet ved den Analyse, for hvilken vi i dette Skrift har gjort Rede, var derimod bygget paa ukontrollerede Erfaringer, hvis Grænser man havde overskredet ved intuitive Interpolationer og Extrapolationer. Den „arithmetiske" Geometri er en rationel Udførelse af disse Udvidelser af det empiriske Omraade.

Indtil for 100 Aar siden var EUKLID's Elementer næsten overalt den brugelige Lærebog i „elementær" Geometri og er endnu enkelte Steder vedbleven at være det. Med den strengt videnskabelige Karakter, som vi her saa stærkt har fremhævet, har den dog ikke kunnet forene de pædagogiske Hensyn, som blev nødvendige, naar den skulde bruges til i en forholdsvis ung Alder at give alle, der gør Fordring paa nogen Dannelse, de nødvendige Forestillinger om Geometrien og dens Anvendelse. Man satte vel med Rette Pris paa den Indførelse i klar logisk Tænkning og Udtryksmaade, som traadte frem i de enkelte Sætninger og Beviser, men for at faa de unge Elever med maatte man slaa af paa den Sammenhæng i Tankegangen, som vi i dette Skrift har stræbt at fremhæve. Denne Sammenhæng forstyrredes ogsaa ved, at man ikke mere havde nogen Interesse af at fremdrage det, som Euklid behandler af Hensyn til en Algebra, som nu har faaet en helt anden Skikkelse og derfor maa læres efter andre Bøger. I Stedet for at se hen til de Veje, ad hvilke Euklid i I. Bog stræber at undgaa Paavisning af Kongruens ved Figurflytning, kunde man ikke undgaa i denne Anskueliggørelse at se den simpleste Vej til de i denne Bog fundne Resultater. Dette har sikkert været det bedste pædagogiske Middel til at faa Flertallet af unge Elever med; men hvortil tjente da Euklid's i Kap. VIII omtalte omhyggelige Ordning, der havde andre Maal for Øje? Den blev uforstaaelig og kunde kun hindre Overblikket over saadanne Sætninger, der som de forskellige Sætninger om Trekanters Kongruens er spredt omkring paa de Steder, hvor Euklid ad sin Vej naar at bevise dem. Der kunde heller ikke være noget tilfredsstillende ved at lære den vidtløftige antike Proportionslære at kende, naar man ad langt lettere Vej ved algebraisk Regning kunde opnaa det samme. At de algebraiske Regningers Almengyldighed af Descartes er paavist ved Henvisning til den i Euklid's V. Bog paa almengyldig Maade beviste Proportionslære, glemte man snart, og da man fandt direkte Beviser for Almengyldigheden af de algebraiske Operationer, blev denne Henvisning jo virkelig overflødig. Hvad der ikke bruges, glemmes imidlertid, og derfor var det vistnok temmelig nyt for de fleste Mathematikere, da Hankel i sin *Geschichte der Mathematik* (1874) pegede paa den nøje Overensstemmelse mellem Euklid's V. Bog og den exakte Bestemmelse af det moderne Talbegreb. Man har ogsaa jevnlig fundet det paafaldende, at Euklid efter den almindelige Lære om Proportioner i V. Bog i de arithmetiske Bøger finder det fornødent særlig at behandle Proportioner mellem hele Tal. Man har derved ikke bemærket, hvor nødvendigt dette var, naar Proportionsformen skulde lægges til Grund for Sætningerne om hele Tals Delelighed; disse Sætninger var det allerede en stor Fortjeneste, at Euklid ikke betragter som umiddelbart indlysende, men at han beviser dem og først derefter lægger dem til Grund for Prøven af Rodstørrelsers Rationalitet. Af disse Exempler ser man, at Brugen af Euklid som Lærebog kunde fjerne Opmærksomheden for meget af det, som laa Euklid selv mest paa Sinde. Hvad man fik ud af hans Bog var da ofte kun saadant, som Grækerne vidste før ham, og hvortil hans udførlige Beviser saa ud som Omveje.

Bedre stillede Sagerne sig dog ikke straks, da man begyndte at sætte andre Lærebøger i Stedet. I disse tog man vel andre Udgangspunkter og ændrede flere Enkeltheder; men som Maalet maatte være at lære det samme, hvortil man hidtil havde anvendt Euklid, laa det nær at forsøge at forbinde det nye med meget, som uforandret gik over fra Euklid, og det gamle og nye kunde ikke altid passe sammen. Saaledes var den første som for Alvor arbejdede paa at afløse Euklid's Elementer med en ny Lærebog, nemlig Legendre, næppe heldig med det nye Udgangspunkt, han tog ved at definere den rette Linie som den korteste Vej mellem to af sine Punkter. Denne Definition kunde være god nok paa den Tid, da Maalesnoren var det vigtigste geometriske Redskab, og er det ogsaa nu overfor dem, der befinder sig paa et ligesaa barnligt Standpunkt. Derimod er den for det første kun et daarligt Middel til ved Anskuelsen at afgøre, om en Linie kan betragtes som ret eller ej; thi til en Afvigelse fra den rette Linie, som er lille af første Orden svarer en Længdeforskel, som er lille af anden Orden (smlgn. S. 94 (292), Note 2). Naar endvidere Legendre's Definition ikke danner noget Udgangspunkt for de simpleste geometriske Undersøgelser, gælder ganske vist, som vi har set, det samme om Euklid's I. Def. 4, og i Virkeligheden bruger Legendre foruden intuitive Betragtninger omtrent de samme Udgangspunkter som dem, Euklid udtrykkelig nævner og bruger. Disse kan imidlertid som hos Euklid bruges til at *bevise*, at en Side i en Trekant er mindre end Summen af de to andre, hvad der hos Legendre er den væsentligste Anvendelse, han kan gøre af sin Definition, og saaledes burde være en Sætning i Stedet for et i Definitionen indsmuglet Postulat. Hos Euklid er tilmed, som vi har set (S. 76 (274) og 144 (342)), denne Sætning I, 20 samt I, 21 Begyndelsen til den Forklaring, som Archimedes giver paa, hvad man skal forstaa ved en krum Linies Længde[1]). Det er omvendt dette vanskeligere Begreb, som Legendre vil bruge til at forklare, hvad en ret Linie er. Denne Ombytning kan heller ikke i Nutiden betragtes som heldig, da dog saavel den elementære Bestemmelse af Cirkelperiferien som Integralregningens af andre Kurvelængder knytter sig til Sammenligning med rette Linier som det mere bekendte.

Som et Exempel paa den Forvirring, der ogsaa, hvor man ikke bruger Euklid's Elementer som Lærebog, i Undervisningen kan opstaa ved Blanding mellem Laan fra Euklid og moderne Betragtningsmaader, kan jeg nævne den Maade, hvorpaa man i min Skoletid lærte Proportioner og deres Anvendelse i Geometrien. Et Forhold defineredes som en Kvotient, og der forlød intet om, hvad en saadan betød, naar Dividend og Divisor var inkommensurable. Det nyttede da ikke meget, at man i Geometrien sikrede sig Proportionalitet ved Beviser, hvori der toges udtrykkeligt Hensyn til Muligheden af, at de geometriske Størrelser kunde være inkommensurable.

Ved disse Bemærkninger er det ikke min Mening at give Anvisning paa, hvorledes den geometriske Undervisning skal anlægges i vore Dage. Ved dels at pege

---

[1]) At Proklos (S. 110,10) tillægger Archimedes den „Definition" paa den rette Linie, at den er den korteste mellem sine Endepunkter, maa bero paa en aabenbar Misforstaaelse af den helt omvendte Brug, som Archimedes gør af denne Paastand i Indledningen til sit Skrift om Kuglen og Cylinderen. (Smlgn. min Artikel: Ueber einige archimedische Postulate i Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften I (1909).

hen paa, hvad der ad mere intuitiv Vej var naaet før den her i dette Skrift omtalte platonisk-euklidiske Reform, dels at fremhæve de Maal, som tilsigtedes ved denne Reform, og de Veje, som Euklid følger for at naa dem paa en fyldestgørende Maade, tror jeg derimod at give enhver Lærebogsforfatter og Lærer de Oplysninger i Hænde, som han har Brug for, naar han selv skal vælge de Laan fra Euklid og de Efterligninger af Euklid's Behandlingsmaade, som kan tjene til virkelig at fremme de Maal, som han sætter sig. Den klare Opfattelse af disse Maal er ogsaa nødvendig for den, som vil have de rette Forudsætninger for at vurdere det omhyggelige Arbejde, som Euklid har udført for at naa dem, altsaa for fra et rent videnskabeligt Synspunkt at fælde en rigtig Dom over Euklid's udødelige Værk.

TILLÆG.

Det her foreliggende Arbejde var næsten trykt færdig, da jeg modtog Eva Sachs: Die fünf platonischen Körper; zur Geschichte der Mathematik und der Elementenlehre Platons und des Pythagoras (Philologische Untersuchungen XXIV), et Arbejde, der vel længe har været bebudet, men paa Grund af Krigen først nu er udkommet. Ganske vist kunde jeg have ønsket at kende dette under mine egne Undersøgelser. Jeg kunde derved have undgaaet at henvise til Resultater af ældre historisk-filologiske Undersøgelser, som nu drages i Tvivl, og jeg vilde have faaet nyt Materiale til, i nogen Tilslutning til E. Sachs' Oplysninger om Theaitets' og Eudoxos' Arbejder, at paavise den Bearbejdelse, som Euklid har maattet underkaste ogsaa de i X. og XIII. Bog behandlede Emner for at tilpasse ogsaa dem til den Plan, hvorefter Elementerne er affattede. Det er maaske dog ikke uheldigt, at E. Sachs' energisk gennemførte filologiske Prøvelse af historisk Overlevering og en Mathematikers Undersøgelser, der først og fremmest maa bygge paa Overleveringernes Overensstemmelse dels med det psykologisk mulige, dels og især med de Betragtningsmaader, som efterhaanden udviklede sig og træder os imøde i de store Mathematikeres bevarede Skrifter, er fremkomne hver for sig. Foruden de Suppleringer, som Behandlingen af hinanden nærliggende Spørgsmaal kan yde, faar man da dels en yderligere Bekræftelse af fælles Resultater, dels Lejlighed til at arbejde det ikke lidet, som endnu peger i forskellige Retninger, sammen, dels endelig Frihed til at vælge mellem saadanne absolut afvigende Resultater, hvortil de to Forfattere kommer.

Som den, der i min Alder næppe tør haabe oftere at kunne tage Ordet i denne Sag, vil jeg dog gerne allerede her gøre et Par Bemærkninger, og jeg skal begynde med nogle Ytringer af mere almindelig Art. Under Anvendelsen eller Prøvelsen af Beretninger om ældre mathematisk Viden kan let nogen Uklarhed opstaa af Forestillingen om, at den maatte være forbunden med Kendskab til de Midler, hvormed vi nu eller dog Euklid begrunder dem (smlgn. S. 134 (332)). Tidligere, da man tilmed var mere lettroende overfor Meddelelser om paastaaede faktiske Fremskridt, bragte denne Forestilling let til at føre de euklidiske Betragtninger og Begrundelser for langt tilbage i Tiden. Naar der saaledes berettes om Pythagoreernes

Kendskab til regulære Polyedre, har man baade i Oldtid og i Nutid ment at maatte tænke paa saadanne Konstruktioner som dem, hvormed EUKLID begrunder deres Existens. Selv har jeg været tilbøjelig til at føre Brug af Konstruktioner ved Lineal og Passer som Bevis- og Erkendelsesmiddel for langt tilbage (hvad jeg nu har opgivet; se mine Bemærkninger om OINOPIDES S. 65 (263)). De samme formodede Forbindelser tages nu med ligesaa liden Berettigelse i den historiske Kritiks Tjeneste, saaledes naar E. SACHS flere Steder, i Tilslutning til H. VOGT, finder Selvmodsigelser i at antage Tilstedeværelsen af en mathematisk Viden paa en Tid, som man ikke vilde tillægge Kendskab til de Midler, der senere benyttedes til nærmere at begrunde den. Der advares endog S. 34 mod at tillægge Udviklingen af Geometrien saadanne „Zicksacksprünge". Jeg tror, at omvendt Udviklingen, navnlig fra først af, da man ikke besad Midler til at foretage en planmæssig Forskning, er gaaet ad ret bugtede og tilfældige Veje. Da har det i højere Grad, end det endnu bestandig er Tilfældet, været ad saadanne Veje, at man først er trængt ind i og er bleven hjemme paa de nye Omraader, før man deri kunde anlægge Veje, som mere sikkert og direkte fører til bestemte Maal, og som — jeg bemærker det af Hensyn til nogle Slutninger af E. SACHS, som jeg senere skal omtale — ikke fører om ad alle de Punkter af det Omraade, som Forfatterne maa have kendt for at finde de Veje, der svarer bedst til deres Hensigter.

Endvidere tror jeg, at Undersøgelser af den Art, som jeg her har forelagt, vil yde en god Erstatning for den rokkede Tiltro til de historiske Meddelelser om ældre Tider, hvorpaa man tidligere byggede. Ganske vist gør Kritiken af disse det vanskeligere at henlægge bestemte mathematiske Fremskridt til bestemte Tider, Steder, Kredse og Personer; men paa den anden Side røber de Principer, som paa PLATON's Tid gør sig gældende, og som ligger til Grund for EUKLID's gennemførte Behandling, hvor højt den mathematiske Kultur allerede maatte være naaet ved Begyndelsen af denne Tid. Naar saaledes THEAITET finder det nødvendigt at bevise og finder Midler til at bevise, at et Primtal ikke kan gaa op i et Produkt uden at gaa op i en af Faktorerne, saa røber allerede Tvivlen om, at man i paakommende Tilfælde uden Bevis kan bygge paa Umuligheden heraf, en betydelig Udvikling af mathematisk Tænkning. Og naar EUDOXOS finder det nødvendigt at give Begrundelser af Sætninger om Proportioner samt infinitesimale Grænseovergange en almindelig og exakt Formulering, saa kan kun en foregaaende Brug af disse Hjælpemidler, forbunden med Drøftelsen af Kontinuitetsbegrebet, have vakt Opmærksomhed for Berettigelsen af de strenge Krav, som han fyldestgør. Herom kan vi dømme i Nutiden, som først efter langvarig Brug af det kontinuert voksende Tal, fremstillet ved et Bogstav, og af praktiske Infinitesimalmethoder har lært at stille og fyldestgøre ligesaa strenge Krav, ja som længe har brugt EUKLID's Værk uden ret at bemærke, hvor vidt han paa sin Side er kommen i den Henseende. Naar nu baade THEAITET og EUDOXOS hver paa sin Maade tager Brug af Proportioner til Udgangspunkt, THEAITET, idet han giver dem en til sit, som PLATON indrømmer (se S. 16 (214)), kunstmæssige Talbegreb tillempet Definition, EUDOXOS, idet han definerer deres

Anvendelser paa geometriske, det er: kontinuert varierende Størrelser, saa tyder dette paa, at begge knytter deres exakte Bestemmelser til et gammelkendt Operationsmiddel. Mængden af delvis ensformede Sætninger, som Euklid i VII.—IX. og V.—VI. knytter til disse Bestemmelser, røber ogsaa en gammel Vane til at operere med Proportioner, før man endnu kunde tage saa exakte Udgangspunkter. At det under en eller anden Form har fundet Sted, forekommer mig at fremgaa af alle Beretninger om den ældre græske, ja, om den ægyptiske Mathematik; de Midler dertil, som virkelig har foreligget, har jeg fremstillet i mit IX. Kapitel. De historiske Meddelelser om geometriske Proportioner og Sammenstillinger med arithmetiske og harmoniske Proportioner, som E. Sachs henviser til (S. 129—132), kan kun vedrøre formelle Opstillinger. Det er vel ogsaa paa saadanne E. Sachs lægger Vægt, medens jeg spørger om de Hjælpemidler, som man i Realiteten havde til Raadighed før en saadan Opstilling. Omtalen af en saadan interesserer mig først da, naar jeg som for Theaitet's og Eudoxos' Vedkommende kender dens Form. At ogsaa Pythagoras saavelsom Thales har brugt geometriske Proportioner, slutter jeg nærmest deraf, at de ikke godt har kunnet undvære dem.

Naar i dette Tilfælde *diversi respectus* maaske hæver Uoverensstemmelsen mellem E. Sachs' Henstillinger og mine Paastande, kan man forsøge at bringe et lignende Forlig tilveje mellem E. Sachs' Udtalelser i Noten S. 95—96 og mine S. 61 (259)—63 (261) om den Rolle, som Euklid's II. Bog spiller i hans System. Efter min Opfattelse indskyder Euklid her i 1.—10. den geometriske Algebra, fordi han netop har Brug for den, medens E. Sachs synes at lade den faa sin Plads her som første Anvendelse af den pythagoreiske Sætning, der dog kun anvendes i 9.—10., tilmed kun i det simple Tilfælde, hvor den retvinklede Trekant er ligebenet. Naar imidlertid E. Sachs tilsidst fremhæver, at „die Reihenfolge, die in der Anordnung der Elemente vorliegt, nicht die historische ist", saa er det ganske det samme, som jeg har gjort gældende her og allerede i „Mathematikens Historie", og ogsaa jeg har da netop fremhævet (ligesom nu), at denne Omordning krævede det nye Bevis I, 47 for den pythagoreiske Sætning. De anførte Ord viser tilmed, at heller ikke E. Sachs vil lade den geometriske Algebra være en Nyskabning af Euklid. Dens tidligere Brug gav rent faktisk ingen Anledning til Skrupler ved Anvendelsen paa inkommensurable eller overhovedet paa kontinuert varierende Størrelser. Hvor tidlig man blev sig denne Fordel overfor en mere arithmetisk Behandling bevidst, derpaa giver den anførte Note intet Svar, altsaa heller ikke et, som strider mod mine tidligere Udtalelser derom. Hvorledes baade Methoden og dens Anvendelse yderligere maatte behandles for at kunne bygges paa euklidiske Principer, ja, det udgør jo en Del af Indholdet af nærværende Skrift. Bemærkningerne om den i II. Bog forekommende Behandling af det gyldne Snit skal jeg senere besvare.

De Henstillinger i E. Sachs' Skrift, som jeg har berørt, er dog kun fremkomne som Exempler paa den Forsigtighed, som man i det hele maa udvise overfor historiske Overleveringer efter hendes grundige Prøvelse af Kilderne til den, der vedrører den fysiske Elementlære og Læren om de fem regulære Polyedre. Som Ikke-

Filolog er jeg henvist til denne og maa altsaa regne med hendes Resultat, der afviger fra de ældre Antagelser om Omfanget af Pythagoreernes Kjendskab til de regulære Polyedre, som jeg anfører S. 124 (322). Som allerede antydet paa dette Sted kan Indskrænkningen i dette Omfang dog ikke udøve nogen væsentlig Indflydelse paa min Betragtning af den Behandlingsmaade, som den platoniske Tid kunde faa overleveret fra den pythagoreiske, og paa denne ligger Hovedvægten i nærværende Arbejde.

Jeg gaar altsaa nu ud fra, at Pythagoreerne kendte Tetraedret, Terningen og Dodekaedret, men først Theaitet tillige Oktaedret og Ikosaedret. Jeg antager ogsaa, at Kendskabet til visse Krystaller kan have ledet Opmærksomheden ikke alene hos Pythagoreerne, men ogsaa tidligere andetsteds i Italien hen paa Dodekaedret. Saa megen videnskabelig Interesse havde Pythagoreerne dog i hvert Fald, at det tør antages at ligge i Beretningen om deres Kendskab til de tre Polyedre, at de har vist de fundne Dodekaedres Egenskaber og disses Overensstemmelse med Tetraedrets og Terningens Egenskaber nogen Opmærksomhed. Ja, man har jo endog før Pythagoreernes Tid lavet Modeller af Dodekaedre, og har disse ikke været helt raa Efterligninger af Krystallen, maa man dertil have benyttet Konstruktionsmidler af en eller anden Art. Disse kan ikke fra først af have været af samme Art som de af Euklid i XIII. Bog angivne; thi de Relationer, som derved benyttes, opdages jo først paa det færdige Polyeder — saaledes som E. Sachs med saa sikker Rumsans S. 103 aflæser de tilsvarende paa en Tegning af det færdige Ikosaeder. Der kan ikke godt have været nogen anden Vej til den første Tilvejebringelse af Dodekaedret end den samme, som Euklid anvender i Bogens Slutning for at bevise, at de 5 regulære Polyedre er de eneste mulige. Maaske foranlediget ved Kendskab til et krystallisk Dodekaeder vil Pythagoreerne, i deres Forsøg paa at danne et saadant og andre regulære Polyedre, paa Siderne i en regulær Polygon have tegnet nye regulære Polygoner med samme Sidetal og bøjet dem om, indtil to paa hinanden følgende fik en Side fælles. Gik man ud fra en ligesidet Trekant, fik man paa denne Maade et regulært Tetraeder; gik man ud fra et Kvadrat, det meste af Overfladen af en Terning; gik man ud fra en regulær Femkant, den halve Overflade af et Dodekaeder. Pythagoreerne, der besad og anvendte Vinkelbegrebet, kunde ikke undgaa at bemærke, at den nødvendige Betingelse for, at den beskrevne Lukning skulde finde Sted, var, at Summen af de tre Vinkler, som skulde danne et Hjørne, er mindre end fire Rette. Gaar man ud fra en regulær Sexkant, forbliver alle Sexkanter i samme Plan; Pythagoreerne vidste da ogsaa, at Planen kan deles i regulære Sexkanter. Delingen af Planen i regulære Trekanter og Kvadrater kendte de ogsaa; men paa den tilsvarende Udvidelse af regulære Polyedre til saadanne, hvis Hjørner er 4- eller 5-sidede, tænkte de efter E. Sachs' Oplysninger ikke; det gjorde først Theaitet [1]).

---

[1]) Disse Bemærkninger i Forbindelse med, hvad jeg siger S. 125 (323), vil maaske forklare, at jeg i Kultur d. Gegenwart tillægger Pythagoreerne noget Kendskab til Sætningen om Summen af Siderne i et konvext Hjørne (smlgn. S. 77 Note i E. Sachs' Skrift). Jeg siger ikke, at den er gaaet forud for Opdagelsen af de regulære Polyedre; men den blev, som det i Reglen sker, knyttet til denne som et, som det forekommer mig, uundvær-

Man kan bemærke, at Resultaterne paa den Maade vil blive iagttagne, men ikke beviste. Men Fastholden af saadanne Iagttagelser er nu engang den første Kilde til mathematisk Viden. Vinkelbegrebet satte tilmed Pythagoreerne istand til at udtale dem i Ord. Paa den Maade er deres Opdagelse af de 3 af Polyedrene en værdifuld Begyndelse paa Undersøgelsen af regulære Polyedre. At Kugler kan omskrives om Polyedrene, vil man straks have bemærket; men først Theaitet har søgt at begrunde dette ved at søge Sammenhængen mellem Polyedrenes Kanter og den omskrevne Kugles Radius. Hvorvidt han er kommen i den Henseende, derom søger E. Sachs Oplysning ved et grundigt Studium af Euklid's Behandling af de samme Spørgsmaal. Dette fortjener saa meget mere Paaskønnelse, som ogsaa Mathematikere, der dyrker deres Fags Historie, ofte forsømmer de store mathematiske Forfattere fra Oldtiden overfor de spredte Oplysninger, som kan findes andetsteds. Naar jeg dog ikke kan fatte Tillid til de Resultater, hvortil Forf. kommer med Hensyn til Theaitet's Viden og de Fremskridt, der paa dette Omraade maatte skyldes Eudoxos, ja, Hermotimos, om hvem vi ved meget lidt, saa beror det paa, at hun efter mit Skøn for lidet behandler Euklid som den selvstændige Mathematiker, han er, der ikke blot refererer ældre Undersøgelser, men ogsaa paa Omraader hvor han ikke har nye Resultater at meddele, benytter det vundne Herredømme over det samlede Materiale til at meddele sit Stof i den Skikkelse, som efter hans Skøn passer bedst med de Formaal, han søger at gennemføre i sit Værk. Man tør ikke tro Euklid selv uvidende om et Resultat, som vil staa til Raadighed for den, der studerer hans Værk grundig og derigennem skaffer sig Overblik over det hele Omraade, hvorigennem Euklid's Kæde af sammenhængende Sætninger strækker sig. Dette gælder saaledes om den Sætning, at der er samme Forhold mellem Tikantsiden og den omskrevne Cirkels Radius som mellem Femkantsiden og Femkantens Diagonal. Deraf, at det er det sidste af disse Forhold, som Euklid benytter, kan man i alt Fald ikke slutte sig til en Mangel paa Kendskab til det første, og førend man knytter historiske Slutninger til denne formentlige Mangel, maa man i alt Fald prøve, om Euklid's nærmeste Formaal ikke fremmes ligesaa godt eller nok saa godt ved at bruge det første. I IV. Bog vil han vise, at man paa Grundlag af hans Postulater kan konstruere regulære Polyedre med 2^n, $2^n.3$, $2^n.5$, $2^n.3.5$ Sider. Da Halveringen af en Vinkel eller Cirkelbue allerede er bekendt, kunde han nøjes med at konstruere en Polygon af hver Kategori; men rig, som han er paa Hjælpemidler, kan han gaa frem i den naturlige Talorden, fra Trekanter, hvor han medtager alle Trekanter med givne Vinkler, til regulære Firkanter, Femkanter, Sexkanter og Femtenkanter. Fra hans rent theoretiske Standpunkt, hvor det kun kommer an paa at konstatere Muligheden af de sukcessive Konstruktioner, uden at Euklid nogensinde spørger, om de saaledes opstaaende Kombinationer giver

ligt Hjælpemiddel. Heller ikke E. Sachs synes at have kunnet undvære den, naar hun, med god Grund, begynder sin i andre Henseender saa dristige Restitution af Theaitet's Skrift med det euklidiske Bevis for, at de 5 regulære Polyedre er de eneste. Det maa nemlig være ad denne Vej, at man har kunnet opdage, at saadanne som Dodekaedret og Ikosaedret overhovedet er til.

de Konstruktioner, som er simplest at udføre, ligger der ingen Vægt paa, at han kunde komme lettere til Tidelingen af en allerede tegnet Cirkel end ved at gaa om ad Femkanten. I XIII. Bog benytter han de i IV. Bog fundne Resultater, som de engang foreligger, og f. Ex. i det elegante Bevis XIII, 10 kan det ikke spille nogen Rolle, om de deri benyttede Figurer er konstruerede paa den ene eller anden Maade. Hvad der i XIII. Bog fremfor alt maa tilhøre Euklid, er den synthetiske Opførelse af Polyedrene af deres Stykker. Da denne ikke gaar ud fra nogen forudgaaende Forestilling om deres Existens, maa den i Formen være ganske forskellig fra den Analyse, hvorved Theaitet først har fundet de derved benyttede Egenskaber, og der er ingen Grund til at tro, at Euklid har indskrænket sig til at vende denne Analyse om. Da Theaitet ikke endnu kendte de senere paa en saadan Omvending beregnede Former for Analysen, er det heller ikke sagt, at den i dette Tilfælde umiddelbart lod sig foretage. Euklid har da benyttet saadanne Hjælpemidler, som han fandt hensigtsmæssige. Pædagogisk hensigtsmæssig eller elementær i moderne Forstand kan man vel ikke her kalde den synthetiske Opbygning af Polyedre, hvorom man først faar nogen Forestilling, naar Bygningen er færdig; men den stemte med de videnskabelige Principer, hvorefter hans „Elementer“ er opbyggede.

Som alt bemærket fremkalder E. Sachs' Arbejde ogsaa Ønsker hos mig angaaende mit eget her foreliggende Skrift. Jeg har i dette fremhævet de med Platon's Ideer stemmende Bestræbelser for at give Fremstillingen af den alt vundne mathematiske Viden en fuldtud rationel Skikkelse. Jeg har ogsaa nævnt de samtidige Mathematikere, Theaitet's og Eudoxos', Bidrag baade til at fremkalde og til at fremme disse Bestræbelser; men jeg har ikke tilstrækkelig paavist, hvorledes ikke alene deres egen Følelse af Logikens Krav, men ogsaa Hensynet til, hvad der kunde fremme deres egne mere positive Undersøgelser, maatte virke tilskyndende paa deres Bidrag ogsaa til den mere formelle Omdannelse og udøve nogen Indflydelse paa den endelige Skikkelse, som denne har antaget hos Euklid. Jeg tænker herved navnlig paa deres Beskæftigelse med de regulære Polyedre, et Emne, der jo endog optræder som et Formaal for Euklid's „Elementer“, og ikke blot, som f. Ex. den da ligeledes begyndte Keglesnitslære, som et af de Undersøgelsesfelter, for hvilke „Elementerne“ skal danne Grundlaget.

Naar Theaitet, som vi antager, har begyndt sin Opdagelse af Ikosaedret med at stille 5 ligesidede Trekanter sammen, saa de danner et femsidet Hjørne og dermed en femsidet Pyramide, og at gøre Vinkelspidserne i dennes Grundflade til lignende Hjørner, vil han have set, at den saaledes dannede Figur tilsidst lukkede sig til et Polyeder med 20 Sideflader. Blikket herfor, som maaske har været støttet ved Dannelse af en Model, har dog været i den Grad intuitivt, at man forstaar, at Theaitet paa dette Punkt har følt Trang til en ganske anden Begrundelse, der tillige indeholdt Beviset for Polyedrets Indskrivelighed i en Kugle. Dette kunde han opnaa ved at finde Relationen mellem en Kant og den omskrevne Kugles Radius og benytte denne til en helt ny Dannelse, hvis Resultat lettere lod sig strengt bevise. Jeg har nævnt Ikosaedret som det Legeme, hvor Trangen til en saadan

Bevisførelse ved geometrisk Konstruktion gjorde sig stærkt gældende; men Fremgangsmaaden lod sig ogsaa anvende paa de andre regulære Polyedre. Den skulde, som vi har set, hos Menaichmos og Euklid blive et Hovedmiddel til paa rationel Maade at tilvejebringe ogsaa saadanne Figurer, hvis Existens man hidtil ikke havde betænkt sig paa uden videre at antage.

Det geometrisk algebraiske Hjælpemiddel, som stod til Raadighed for Theaitet ved Bestemmelsen af Sammenhængen mellem Polyedrenes Kant og største Radius, var den under Form af Fladeanlæg overleverede Løsning af Ligninger af 2. Grad. Sikkert har allerede Pythagoreerne brugt den ved Konstruktion af den regulære Femkant, som de ogsaa havde Brug for ved den her beskrevne Tilvejebringelse af Dodekaedret; Beskæftigelsen med regulære Polygoner maatte gaa forud for Studiet af de regulære Polyedre. Den til Konstruktionen nødvendige Højdeling fremtræder i Euklid II, 11 som en umiddelbar Anvendelse af det af Pythagoreerne kendte hyperbolske Fladeanlæg og lader sig udføre ved de af dem anvendte Redskaber, altsaa uden Brug af Tegnepasser (se S. 65 (263)). Theaitet's Undersøgelser kræve dog en mere kombineret Brug af de samme algebraiske Hjælpemidler. Han kunde vel løse sin Opgave ved hver Gang at fremstille den fundne Rod i en Ligning ved et nyt Liniestykke og dernæst betragte det som bekendt; men derved fik man ikke noget samlet Overblik; det vilde gaa som ved Brugen af en litteral Algebra, hvor man vel fremstillede Størrelserne ved Bogstaver, men savnede Operationstegn, særlig Kvadratrodstegn. Paa Mangelen heraf raadedes Bod dels ved en nøjere Præcisering af de udførte Konstruktioner, hvortil vistnok nu særlig brugtes Lineal og Passer, dels ved en Klassifikation af de ved disse Midler efterhaanden konstruerede Størrelser. Det er denne Klassifikation, som er paabegyndt af Theaitet og yderligere gennemført i Euklid X.

De moderne Operationstegn bruges imidlertid ikke alene til at danne Udtryk for de efterhaanden fundne Størrelser; ved Regler for Regninger med saaledes fremstillede Størrelser sættes man i Stand til at underkaste dem nye Operationer. De gamle maatte faa Brug for noget, som kunde træde i Stedet herfor, og som de i det mindste kunde anvende paa de enkelte forefaldende Undersøgelser. Ved Beregninger vedrørende Dodekaeder og Ikosaeder var der Brug for Sætninger vedrørende Rødderne i Ligningen $x^2 + ax - a^2 = 0$ eller om de Stykker, som fremkommer ved at højdele en ret Linie. Det er en Række saadanne Sætninger, som Euklid har indskudt som 1.—5. i sin XIII. Bog. De fremtræder ligesom II, 1—10 som Laanesætninger, der ikke er bestemte til selv at udgøre et Led i hans systematiske Fremstilling af Geometrien, men for hvilke han netop nu har Brug. Den Omstændighed, at der begge Steder er fremsat flere Sætninger end de, som han derefter virkelig bruger, og at de iøvrigt ikke er indarbejdede i den øvrige euklidiske Sammenhæng, tyder paa, at de er tagne ud fra en anden Sammenhæng. For dem i II. Bog har vi henvist til den alt existerende, i moderne Forstand mere elementære, geometriske Algebra. Om dem i XIII. Bog kan jeg i Henhold til de af E. Sachs givne Oplysninger nu godt gaa ind paa, at de er tagne ud af et Skrift af Eudoxos *περὶ τῆς τομῆς*, hvor da *ἡ τομή* skulde betyde det saakaldte „gyldne Snit", Højdeling. Med E. Sachs (S. 97—98) antager jeg, at naar det siges, at „Eudoxos formerede Sætningerne om det gyldne Snit, som var begyndt af Platon", skyldes denne Henførelse til Platon Proklos; men jeg kan ingenlunde være enig med hende i, at dermed Udførelsen af Højdelingen tidsfæstes. Der er jo ikke en Gang Tale om Udførelsen, men kun om Sætninger om *ἡ τομή*. At dette Navn skriver sig fra den Tid, er iøvrigt rimeligt nok; det kan da hidrøre fra, at man nu benyttede Liniens Skæring med en tegnet Cirkel, hvor man tidligere brugte en Maalepasser.

Derimod mener jeg, at der maa lægges en større Vægt, end jeg selv har gjort S. 36 (234), paa, at der siges, at Eudoxos anvendte den analytiske Methode ved denne og de andre nævnte algebraiske Undersøgelser. Derved kan ikke tænkes blot paa en saadan, om end fuldt bevidst, saa dog nærmest praktisk Anvendelse af denne Methode som den, hvorved man har opløst den ældre geometriske Viden i de „Elementer", hvoraf Geometrien dernæst lod sig synthetisk opføre; men den udtrykkelige Omtale viser, at Analysen i Eudoxos' Skrifter om disse Emner maa være traadt frem i bestemte Former. Derefter maa allerede Eudoxos have haft en væsentlig Andel i Udviklingen af disse Former, og de, som Eudoxos har anvendt, vil endogsaa derefter være betragtede som Paradigmer. Uden saadanne vilde Formerne for Fremstilling af Analyse og Synthese ikke kunne have faaet den uforanderlige Fasthed, som de fik i den græske Mathematik. Disse Paradigmer, der vedrører Behandlingen af Opgaver, som afhænger af Ligninger af 2. Grad, er da bleven fuldstændiggjorte med de alt nævnte Anvendelser af Analysen paa mere specielle Opgaver, som skyldes Eudoxos' Disciple Menaichmos og Deinostratos (se S. 40 (238) og 37 (235)). Under disse Omstændigheder er det forklarligt, om Euklid i XIII, 1—5 uforandret har optaget Eudoxos' Sætninger og Beviser, eller idet mindste disses Synthese; men ogsaa i dette Tilfælde er det rimeligt, at den bevarede tilsvarende Analyse ligeledes skyldes Eudoxos[1]).

Foruden sine Undersøgelser over Rodstørrelsers Irrationalitet, hvis Betydning for den i nærværende Skrift behandlede Reform er fremhævet i vort III. Kap., og i Forbindelse med sin Klassifikation af Størrelser, hvis Udtryk i moderne Fremstilling vilde indeholde Kvadratrodstegn, beskæftigede Theaitet saavel som Euklid i X. Bog sig ogsaa med disse sidste Størrelsers Irrationalitet; men i sig selv er deres Fremstilling og Behandling ved geometrisk Algebra ganske uafhængig af dette theoretiske Spørgsmaal: Fremstillingen af $\sqrt{2}$ ved Diagonalen i et Kvadrat kan bruges uafhængig af, om man ved, at denne Størrelse ikke kan udtrykkes nøjagtig som For-

[1]) Den Omstændighed, som S. 95, Note 1 har forekommet E. Sachs paafaldende, og hvoraf hun vil drage vidtrækkende historiske Slutninger, bliver da ganske forklarlig. Sin Analyse har Eudoxos nemlig ikke kunnet knytte til den færdige Konstruktion, men har, som det er sket, maattet gaa tilbage til Brugen af den geometriske Algebras Rektangler og Kvadrater. Iøvrigt er det mig ikke klart, paa hvilke væsentlige Punkter E. Sachs kan mene, at den Konstruktion som Eudoxos enten maatte have kendt eller dog maatte have faaet ud af sine Sætninger, kan have afveget fra den, som findes i Euklid II, 11.

holdet mellem to hele Tal[1]). Jeg kan derfor ikke forstaa den Sammenhæng, som E. SACHS gør gældende S. 37 og 105, og i Henhold til hvilken „Mathematikerfortegnelsens“ Beretning om PYTHAGORAS' Opdagelse af irrationale Størrelser maatte falde sammen med dens Beretning om de 5 regulære Polyedre. Muligt er det rigtignok, at PROKLOS har gjort sig skyldig i den samme Sammenblanding, og det kan i hvert Fald siges, at naar det er urigtigt, at i denne Fortegnelse Kendskabet til alle regulære Polyedre tillægges Pythagoras, maa Meddelelsen om Opdagelsen af irrationale Størrelser ogsaa modtages med nogen Forsigtighed. Dette har jeg iøvrigt gjort i mit Arbejde om Irrationalitetslærens Oprindelse (Oversigt 1915) — om end da nærmest foranlediget ved en Fortolkning af PROKLOS' Ord af VOGT, som E. SACHS bestrider.

Femmøller paa Mols, August 1917.

H. G. ZEUTHEN.

[1]) Hermed stemmer en Bemærkning af H. VOGT, som E. SACHS anfører S. 81.

Sur la réforme qu'a subie la mathématique de Platon à Euclide, et grâce à laquelle elle est devenue science raisonnée.

Résumé par H. G. Zeuthen.

Chap. I. Sur l'étude comparative de l'histoire des mathématiques.

La réforme qui va nous occuper demande une comparaison du savoir géométrique antérieur, relevant en grande partie de l'intuition, avec la nouvelle géométrie raisonnée. Comme c'est le cas pour toutes les comparaisons servant à illustrer les progrès scientifiques, celle qui nous occupe ne devra pas se borner à faire paraître les avantages des nouveaux points de vue et l'extension du savoir qu'ils permettent, mais s'occuper aussi de l'étendue du savoir acquis antérieurement et qui allait faire l'objet des nouvelles considérations, ainsi que de la nature et de la valeur des moyens qui avaient déjà permis de l'acquérir.

Chap. II. La mathématique science raisonnée.

Des conclusions logiques partant de suppositions plus ou moins fortuites ne suffisent pas pour valoir à une science la qualification de *raisonnée.* Une science raisonnée doit former un entier logique où l'on rend compte tant des points de départ que des conclusions qui conduisent à toutes les vérités particulières. Tel est l'idéal qu'Euclide a voulu réaliser dans ses Éléments de la Géométrie. Les définitions disent ce que sont les notions; les postulats affirment qu'il en existe qui ont certaines relations avec les autres notions définies. A côté des notions communes aux différentes sciences, et dont Euclide énumère celles qui servent à définir la grandeur des quantités et en particulier celle des quantités géométriques, les dites hypothèses font les points de départ des conclusions servant à constituer la théorie. Ce n'est que grâce à ces hypothèses et aux conclusions qu'on en tire successivement qu'existent les figures géométriques; les dessins qui les représentent ne servent qu'à retenir les figures idéales. Celles-ci sont donc des symboles qui ne possèdent que les propriétés qu'on leur a attribuées expressément, et les vérités démontrées deviennent applicables à tout domaine où l'on a retrouvé les mêmes propriétés fondamentales. C'est ainsi que, dans la géométrie d'Euclide, on a symbolisé une théorie générale des quantités, une algèbre géométrique. Malgré la différence des symboles, la géométrie d'Euclide est à cet égard le modèle des mathématiques modernes et d'autres sciences exactes.

Le but qu'il avait en vue pendant la composition de ses Éléments, Euclide ne l'explique pas; il faut le reconnaître par ses efforts pour le réaliser. Mais le même but idéal avait été proposé par Platon, dont les élèves mathématiciens se mirent en devoir de l'atteindre. Les Éléments d'Euclide contiennent le résultat final de ces efforts.

Chap. III. Les demandes adressées par PLATON à la mathématique en sa qualité de science raisonnée.

La tendance théorique de la mathématique grecque avait déjà débuté par la découverte de quantités irrationnelles et s'était ensuite manifestée par les recherches qui s'y rattachaient: l'épreuve de la commensurabilité de Théodore et son application, due à Théétète, pour décider sur la rationalité des radicaux, la représentation géométrique des quantités qu'on ne peut exprimer par des nombres. Dans son »Théétète« et dans »les Lois« Platon exprime son intérêt pour ces recherches d'une nature purement théorique. Il leur doit sans doute la conviction de la possibilité d'une constitution raisonnée de la mathématique entière telle qu' il la préconise dans son »État«. Dans le livre VI de ce dialogue il rappelle la nécessité d'hypothèses formelles et l'immatérialité des figures géométriques. Il y revient dans le livre VII, où il s'occupe de l'éducation des jeunes gens destinés au service de l'État. Il leur recommande une étude des mathématiques qui n'ait pas en vue les applications pratiques, mais l'appropriation intellectuelle (*διάνοια*). En commençant par l'arithmétique, il donne des notions de l'unité et du nombre des explications qui leur attribuent un sens s'appliquant uniquement à des nombres qu'il »faut penser«. Si l'on veut partager l'unité, dit-il, les mathématiciens la multiplient. Cette remarque nous rappelle que, dans ses livres arithmétiques, Euclide substitue à la simple formation de fractions des opérations, bien expliquées, avec des nombres entiers. Les notions en question sont les mêmes qu'Euclide définit et applique dans son livre VII, qui contient une partie essentielle de la démonstration du théorème de Théétète indiquant le critère de la rationalité des radicaux. Il semble donc que cette démonstration ait servi à Platon de modèle des exigences qu'il allait adresser à d'autres démonstrations géométriques.

Ses remarques sur la géométrie plane n'ont rien de très particulier, et il semble assez satisfait des progrès déjà faits, peut-être sous l'influence de ses propres suggestions antérieures; mais il est très mécontent de l'état de la stéréométrie, que, selon lui, on devrait cultiver avant de s'occuper, dans l'astronomie, des mouvements dans l'espace. Or, à cette époque les connaissances stéréométriques progressaient assez rapidement; il doit donc faire allusion au défaut d'un exposé raisonné.

Chap. IV. »La méthode analytique«; »éléments«.

Du temps de Platon on était déjà en possession d'une très grande partie du savoir positif auquel conduisent les Éléments d'Euclide; mais ces connaissance étaient dues à un mélange plus ou moins fortuit d'intuitions et de conclusions. Quels moyens possédait-on pour en faire une totalité logique, répondant aux exigences de Platon?

On a attribué à Platon l'invention de la méthode analytique, quoique ses écrits ne décèlent aucune connaissance des termes techniques propres à cette méthode; mais il est hors de doute que les formes servant à faire ressortir l'exactitude d'une analyse, et de la synthèse qui en résulte par une inversion, ont été, en tout cas, élaborées pendant l'espace de temps qui sépare Platon d'Euclide, lequel, dans ses Eléments, se sert des formes convenues pour la synthèse et du langage stéréotype et précis qui y appartient, tandis que ses Data sont déterminés à faciliter l'emploi de l'analyse.

Suivant le procédé ordinaire de l'analyse, on commence par admettre comme déjà trouvé ou démontré ce qu'en réalité on se propose de trouver ou de démontrer, et on en tire ensuite les conséquences jusqu'à ce qu'on arrive à quelque chose qu'on possédait déjà; dans la synthèse suivante on revient sur ses pas jusqu'à ce qu'on atteigne le but proposé originairement. Tel est l'usage que nous faisons aujourd'hui de la méthode et celui dont se servait Pappus, qui en a fait la description; mais l'emploi de ce procédé suppose qu'on possède déjà un savoir bien constaté. Pour trouver, au temps de Platon, une base logique du savoir assez étendu, mais moins consolidé, qu'on possédait, il fallait employer l'analyse pour revenir des vérités composées que fournit l'intuition à des vérités de plus en plus simples jusqu'à celles qu'il était impossible de décomposer ultérieurement. Avec elles on faisait les hypothèses susceptibles de former, par composition, un système synthétique contenant à la fois les vérités connues qu'on avait commencé par analyser et des vérités nouvelles.

C'est à un tel procédé que se rattache l'usage du mot »éléments« (στοιχεῖα). Aristote et Ménechme expliquent qu'une proposition (avec sa démonstration) est élément d'une autre (et de sa démonstration) si la première sert à démontrer la seconde. Par l'analyse on résout donc successivement les théorèmes ou problèmes dans leurs éléments jusqu'aux derniers, selon Ménechme jusqu'aux postulats. On trouve ainsi des éléments dont on peut composer par l'opération inverse l'exposé synthétique de toute la théorie, ce qu'a fait Euclide. D'autre part ses 13 livres s'appellent aussi »Éléments«, à savoir ceux des théories ultérieures qu'on va en composer. De même Apollonius appelle les quatre premiers livres de ses »Coniques« les éléments de la théorie de ces courbes. Ayant un but scientifique, de tels »Éléments« doivent satisfaire les plus grandes exigences logiques: plus ils sont exacts et généraux plus les théories ultérieures qu'on en forme posséderont les mêmes qualités.

Chap. V. Sur les mathématiciens qui ont réalisé la réforme platonicienne.

Dans son énumération des plus anciens mathématiciens grecs, Eudème cite un assez grand nombre d'élèves de Platon, et la collaboration qu'il leur attribue doit avoir eu pour objet la réforme dont nous parlons, ainsi que les formes, regardées par la postérité comme obligatoires, de l'analyse et de la synthèse. Quant au premier de ce nombre, Eudoxe, la question se pose de savoir si les grands progrès mathématiques qu'on lui doit n'ont pas servi, aussi bien que ceux de Théétète, à inspirer Platon, autant que de son côté il a été influencé par les communications du grand philosophe. Quoi qu'il en soit, son fameux postulat (Euclide V, Def. 4) — qu'à tort on à attribué à Archimède — est un excellent exemple de l'analyse dont nous avons parlé; nous y reviendrons dans le Chap. XI.

Proclus a conservé plusieurs contributions de Ménechme à la constitution d'»Éléments« satisfaisant les idées de Platon. Nous avons rappelé sa mention des postulats, et une discussion qu'il a eue avec le philosophe Speusippe porte à croire qu'il faut lui attribuer l'idée de se servir, comme le fait Euclide, de ces hypothèses d'existence pour démontrer par les constructions dans les »problèmes« l'existence des figures composées, — avant d'en démontrer les propriétés dans les »théorèmes«; il a même commencé la réalisation d'un tel projet par les mêmes deux problèmes qui servent à Euclide d'introduction à son système (I, 1 et 2).

On retrouve une idée semblable, dans la célèbre découverte de Ménechme, que les courbes, $y^2 = bx$ et $xy = ab$, qui servent à la construction des deux moyennes géométriques entre a et b, sont des sections coniques. Cette constatation sert, en effet, à établir l'existence des deux courbes, celle du cercle étant déjà postulée. Ménechme parvient du reste aux dits résultats par une analyse suivie d'une synthèse qui a plus tard servi de modèle des formes utiles de ces deux opérations. De même, une démonstration de son frère Dinostrate a pu servir de modèle de l'application de la réduction à l'absurde pour démontrer la justesse d'une valeur limite.

On doit à Theudius des Éléments auxquels sans doute l'influence de Platon, et d'Eudoxe, a commencé de se faire valoir. De nombreuses citations d'Aristote permettent une comparaison de ces Éléments avec ceux d'Euclide, et nous mettent à même de juger des progrès qu'avaient préparés Ménechme et d'autres savants, et qu'Euclide a réalisés.

A côté des mathématiciens, Aristote a beaucoup contribué à donner aux Éléments leur juste forme. D'un côté, ses lois logiques sont en grande partie obtenues par une analyse et une généralisation des conclusions des mathématiciens, ce que montrent ses exemples; d'autre part, les énoncés formels de ces lois auront été d'utiles guides aux mathématiciens occupés de transformer la mathématique en science raisonnée. On explique le mieux le chap. 10 du livre I des Analytiques postérieures en le mettant en rapport avec l'usage que, depuis Ménechme, contemporain d'Aristote, on faisait des postulats et des problèmes. — Les mêmes deux savants se sont rencontrés dans l'étude de l'inversion des propositions.

Chap. VI. Images intuitives et primitives; aperception par la vue.

Pour trouver les sources, tant psychologiques que logiques, des connaissances géométriques qu'on possédait avant la réforme platonicienne, il faut commencer par se demander quelles sont les images géométriques qui se présentent le plus immédiatement comme résultats d'une combinaison inconsciente de la perception d'impressions sensibles, du souvenir de sensations antérieures et de conclusions involontaires. A ce sujet il faut consulter d'un côté les expériences psychologiques modernes, de l'autre les rapports sur les plus anciennes observations géométriques ou sur celles qui sont dues à des peuples se trouvant encore à un état de développement primitif. On en peut tirer les règles suivantes.

Les images intuitives et primitives représentent des figures toutes faites et complexes; ce n'est que par l'analyse qu'on en sépare les parties simples. On saisit les images avant de savoir les décrire. On s'est par exemple occupé de figures planes sans éprouver le besoin de dire ce que c'est qu'un plan. On conçoit une figure plane comme une totalité avant d'accorder une attention particulière à son contour; cela ne devient nécessaire qu'à mesure qu'il s'agit de décrire la figure d'une manière plus précise. On conçoit d'assez bonne heure l'égalité de deux figures totales ou de parties d'une même figure et la possibilité de donner à une figure une nouvelle place sans l'altérer; la conception de ce que nous appelons à présent congruence est donc assez primitive. Dès qu'on commence à s'occuper du contour, la conception d'une droite se présente immédiatement à l'esprit, et on s'occupera bientôt de cercles et de distances; le cordon sert à produire des droites et des cercles et à mesurer ou à porter les distances. On reconnaît immédiatement le rectangle comme un quadrilatère dont les quatre coins sont uniformes; et cette connaissance conduit à l'usage de perpendiculaires et de parallèles pour décomposer un camp en rectangles et en carrés, et ensuite aux mesurages de surfaces rectangles. On ne doutera pas de l'égalité des triangles résultant de la décomposition d'un rectangle au moyen d'une diagonale. On découvre à vue d'œil l'égalité de deux figures symétriques, ce qui conduit à la construction de perpendiculaires au moyen du cordon.

Pareillement la similitude de deux figures, ou leur égalité à l'échelle près, détermine une image primitive qui comporte une conscience de la proportionnalité de leurs longueurs et ensuite de celle de leurs aires.

Chap. VII. Déplacements de figures avant la réforme platonicienne; instruments géométriques.

Les Çulbasūtras indiennes, contenant des règles géométriques pour la construction ritualiste de sanctuaires, nous offrent l'exemple d'une géométrie très ancienne. Aussi ces règles peuvent-elles être obtenues par les moyens intuitifs dont nous venons de parler. Les opérations se font en grande partie sur un plan décomposé en carrés. On y trouve une seule démonstration: elle établit l'égalité d'un trapèze isoscèle à un rectangle qu'on forme par le déplacement d'un triangle (voir fig. 1, p. 55 (253)). On connaissait le théorème de Pythagore, mais l'énonçait pour les côtés d'un rectangle et sa diagonale; le triangle rectangle ne se présente qu'au moment où on en fait usage dans une construction. On employait la figure que les Grecs ont appelé gnomon: différence de deux carrés à un angle commun, et on a même su en faire usage pour construire (comme Euclide II, 14) un carré égal à un rectangle donné. La connaissance du gnomon explique celle de plusieurs triangles rectangles à côtés exprimables par des nombres entiers; on en a pu trouver en remarquant des gnomons contenant des nombres quadratiques représentant les carrés dont était composée la base des opérations. On n'y trouve aucune démonstration du théorème de Pythagore; mais une ancienne table chinoise (fig. 2, p. 58 (256)) nous montre d'une manière fort intuitionniste comment on a pu y parvenir par des déplacements de figures; après deux mille ans on reconnaît encore la même démonstration, appliquée à un triangle au lieu d'un rectangle, dans celle de Bhāskara (fig. 3, p. 59 (257)).

Les Pythagoriciens ont fait du »théorème de Pythagore« et du gnomon des applications semblables à celles des anciens Indiens, et ils ont fait des déplacements des rectangles et des carrés une véritable algèbre géométrique comprenant même la résolution d'équations mixtes du second degré. Dans les 10 premières propositions de son livre II Euclide substitue des constructions géométriques aux déplacements intuitifs avant d'en faire, dans les 4 dernières propositions, les applications dont il a immédiatement besoin.

Pour réaliser matériellement les déplacements on s'est servi d'instruments géométriques, et tout d'abord du cordon. Les Égyptiens se sont servis aussi de règles et de gnomons solides; le dernier instrument servait soit à construire des perpendiculaires, soit à donner, sans intervention de la notion de l'angle, à une droite une inclinaison donnée par rapport à une droite donnée (voir fig. 5 p. 64 (262)). Les Pythagoriciens ont eu à leur disposition, pour construire les figures illustrant leur algèbre géométrique, la règle, le gnomon et le compas à mesurer. Les premières applications du compas à dessiner ne sont attribuées qu'à Œnopide; c'est grâce à lui qu'on a obtenu l'exactitude que demandaient les dessins astronomiques.

Chap. VIII. Les déplacements d'EUCLIDE.

Depuis Ménechme on substituait, dans la géométrie raisonnée, l'usage de postulats à celui d'instruments, et les problèmes, ou constructions dépendant de postulats, aux constructions matérielles. En même temps les »notions communes« 7 et 8 devaient servir à la comparaison des grandeurs géométriques. On suppose alors que l'une des figures soit »appliquée« sur l'autre; mais cette application ne doit plus se faire par un déplacement matériel ou intuitif de la figure totale: il faut l'effectuer par une construction. La coïncidence, critère de l'égalité, résulte alors de l'univocité, à la place près, de la construction de la figure déplacée. Euclide réalise effectivement dans I, 2 un tel déplacement constructif d'une droite limitée; mais la démonstration de l'égalité de deux triangles ayant égaux un angle et les deux côtés adjacents (I, 4.), ne peut plus s'effectuer de la manière qu'on voulait rendre obligatoire. C'est pour cette raison que Hilbert a fait de cette égalité un axiome. Euclide se tire d'affaire d'une autre manière: dans la démonstration de ce théorème et du théorème I, 8 il suppose l'application sans dire, ici, un mot sur la manière dont il faut l'effectuer; il montre seulement qu'une telle application suffirait pour établir la coïncidence, totale en I, 4., partielle en I, 8. Ce n'est qu'en faisant usage de ces théorèmes et après plusieurs détours apparents qu'Euclide parvient dans le problème 23 au déplacement constructif d'un angle dont il a besoin pour réaliser l'application supposée de la seule manière qu'il reconnaisse. Déjà les contemporains d'Euclide lui ont reproché de donner ainsi un théorème avant le problème établissant l'existence de la figure en question. Et, en réalité, Euclide n'évite pas un cercle vicieux; mais le fait que le cercle des conclusions se ferme de lui-même assure du moins la possibilité de la supposition qu'Euclide a faite dans ses démonstrations de 4 et 8. Ensuite les autres déplacements se font par des problèmes.

Déjà du temps d'Aristote on avait remarqué les difficultés que présente la théorie raisonnée des parallèles: elles n'ont été surmontées que plus tard par le célèbre postulat 5 d'Euclide; mais comment expliquer le besoin de son postulat 4 touchant l'égalité d'angles droits? Historiquement il a pu être substitué, comme les 3 premiers, à l'usage d'un instrument, à savoir à celui du gnomon. Cependant Euclide ne fait pas de véritable emploi du postulat, mais se borne aux constructions qu'instrumentalement on pourrait accomplir par la règle et le compas, tandis que peut-être Ménechme se servait encore du postulat pour la construction du carré, mentionnée, elle aussi, à propos de sa discussion avec Speusippe. Il serait pourtant possible de trouver un motif qui eût pu déterminer Euclide à garder ce postulat, aparemment superflu. En effet, il ne fait pas non plus d'emploi géométrique de la définition 4, celle d'une droite, qui a pour seul but de renvoyer à la manière dont on forme des droites dans les arts; au lieu de cela il se sert des postulats qui demandent l'existence de droites douées de certaines propriétés géométriques: la définition 4 énonce l'identité de ces droites avec les droites empiriques idéalisées. De même on a eu vraiment besoin d'une déclaration semblable disant que les longueurs, définies par les »notions communes« et employées dans la définition 15 du cercle, sont identiques aux longueurs empiriques. En effet, si l'on excepte le postulat 4, la géométrie raisonnée fondée sur les autres suppositions d'Euclide serait applicable à une géométrie dont les cercles sont en réalité des ellipses semblables et semblablement posées. Je ne dis pas qu'Euclide ait observé une telle possibilité; mais, sous une forme ou une autre, il a pu avoir eu un sentiment du danger anquel il s'exposerait en omettant le dit postulat, de même qu'un juste sentiment l'a porté à éviter, par son postulat 5, les géométries que nous appelons à présent noneuclidiennes.

Chap. IX. La similitude des figures.

Le sentiment intuitif de la similitude a amené de bonne heure des essais de déterminer le rapport d'un cercle au carré circonscrit, ou celui de la circonférence au diamètre. On en trouve chez les anciens Indiens et chez les Égyptiens d'une époque où l'on ne savait leur donner qu'une exactitude assez mince. Ils sont continués par les Grecs, ce que montrent les tentatives dans ce genre d'Antiphon et de Bryson. Et même pour s'expliquer qu'Hippocrate de Chios ait pu prendre pour points de départ de ses recherches l'identité pour tous les cercles du premier des dits rapports ainsi que la similitude de deux segments qui font les mêmes parts des cercles respectifs, on n'a nullement besoin de penser à des démonstrations de ces suppositions qui satisferaient à un élève d'Euclide.

La détermination des inclinaisons par le gnomon, et celle des distances à des points inaccessibles montrent que les Égyptiens et, aprés eux, les Grecs ont fait usage de la proportionnalité des droites de figures semblables. Sans doute, les Pythagoriciens ont étudié, aussi numériquement, des proportions, du moins dans leur musique; mais rien n'indique qu'ils en aient fait usage pour en déduire des critères de la similitude. Au contraire, de même que le déplacement de figures pour l'égalité, les similitudes intuitivement évidentes leur auront servi de démonstration de proportionnalités de grandeurs représentées géométriquement, et ils auront cru posséder ainsi une méthode applicable aussi aux quantités incommensurables. Alors la réforme platonicienne aura entraîné non seulement la démonstration directe et générale des proportions qu'on trouve dans Euclide, V., mais aussi l'inversion qui en fait la base de la théorie de la similitude.

Toutefois le sentiment immédiat de la similitude continue à jouer un certain rôle même dans les Éléments d'Euclide. On y trouve, en effet, des définitions indépendantes entre elles de la similitude, l'une pour les segments de cercle, l'autre pour les polygones. Qu'Euclide choisisse la même dénomination dans ces deux cas différents, et que les lecteurs l'approuvent, voilà ce qui doit résulter d'un sentiment intuitif et commun. C'est le même sentiment qui a conduit Euclide aux critères des similitudes des différentes sortes de coniques qu'Archimède nous a fait connaître. Seulement Apollonius définit la similitude des différentes coniques par la proportionnalité des deux coordonnées des points des figures, définition applicable à toute sorte de figures.

Chap. X. L'origine de la notion de l'angle.

Dès le début de la géométrie on a connu la perpendicularité de deux droites, mais nullement la comparaison de deux angles regardés comme grandeurs. Seuls les astronomes babyloniens en ont eu besoin, tandis que nous avons vu que les astronomes égyptiens et après eux les Grecs y ont substitué l'usage du rapport de deux droites. C'est l'étude des figures semblables qui a porté les géomètres grecs à parler d'angles égaux, qu'ils appelaient angles »semblables«. Selon Eudème, déjà Thalès aurait fait ainsi; quoi qu'il en soit, la formation de la notion ne s'est pas fait attendre longtemps, et elle a été suivie par la comparaison de deux angles, leur addition, etc. La manière dont la notion d'un angle droit était liée à celle d'un rectangle a montré que la somme des angles aigus d'un triangle rectangle est égale à un angle droit; ensuite on a établi, par la décomposition d'un triangle en deux triangles rectangles (voir fig. 12, p. 100 (298)), le théorème sur la somme des angles d'un triangle quelconque. La démonstration qu'Eudème attribue aux Pythagoriciens s'obtient par la même figure si l'on y efface les trois perpendiculaires et fait usage des propriétés intuitives des parallèles.

Un contemporain d'Aristote (probablement Theudius) a fait usage dans une démonstration d'angles curvilignes, et encore Euclide tient compte de ces angles dans ses définitions; mais la définition V, 4. (postulat d'Eudoxe) les exclut formellement de la théorie générale des grandeurs que contient le dit livre.

Chap. XI. Généralisation des démonstrations; recherches infinitésimales.

Euclide a soin de s'assurer que les démonstrations embrassent tous les cas auxquels s'appliquent les énoncés des théorèmes. Il ne lui suffit donc pas de démontrer les proportions dans les cas où les termes sont commensurables, ni d'appliquer immédiatement aux limites ce qu'on avait prouvé pour des cas qui s'y approchent indéfiniment. A ces égards on s'était contenté autrefois d'une transition intuitive à l'infini, et la représentation géométrique a augmenté la confiance qu'on croyait pouvoir accorder à une telle intuition (voir chap. IX). Toutefois déjà les paradoxes de Zénon devaient contribuer à l'ébranler, et du temps de Platon on ne pouvait plus s'en contenter. C'est Eudoxe qui a trouvé une formule permettant d'assurer la validité des résultats de telles transitions par une réduction à l'absurde. Son postulat énoncé dans Euclide V, Déf. 4, demande l'existence d'un multiple d'une quantité donnée qui en surpasse une autre. Euclide en déduit, X, 1, une autre formulation exprimant qu'en répétant la soustraction de la moitié d'une quantité, ou de plus de la moitié, on finira par trouver un reste plus petit qu'une autre quantité donnée. V, Déf. 4 est le dernier »élément« d'une analyse de la transition à l'infini, et X, 1 est l'avant-dernier. V, Def. 4 fait ainsi le plus simple point de départ d'un exposé synthétique, et Archimède s'en sert dans les démonstrations des résultats de ses recherches infinitésimales, tandis qu'Euclide et probablement Eudoxe se contentent de prendre X. 1 pour point de départ des leurs.

Pour la généralisation des proportions, au contraire, Euclide dans son livre V, où il suit la voie frayée par Eudoxe, se sert de V, Def. 4: en y joignant l'usage des définitions 5 et 7 il parvient à des critères de l'égalité ou l'inégalité de deux rapports qui ressemblent à ceux de Dedekind. Cependant une remarque d'Aristote nous montre que cette détermination a été précédée par une autre où l'on se servait seulement de X, 1, de même que la détermination de Dedekind a été précédée de celle de Weierstrass. Aristote rappelle, en effet, une définition qui fait dépendre l'égalité de deux rapports de l'identité des »antanaireses« des deux termes de chaque rapport, c'est-à-dire des nombres provenant des procédés, en général infinis, qui devaient servir à en déterminer le plus grand facteur commun, s'il y en avait, ou bien de celle des fractions continues servant à les déterminer. Euclide fait du reste, au commencement du livre X, usage du même procédé pour éprouver la rationalité d'un rapport.

Chap. XII. Généralisation des énoncés; équations du second degré.

Conformément aux demandes d'Aristote, Euclide s'efforce de donner à ses énoncés la forme la plus générale possible; il étend ainsi le domaine auquel ils s'appliquent immédiatement. Cependant, dans les cas où les proportions contiennent les démonstrations d'opérations qui deviennent plus simples et faciles, sans devenir moins effectives, par l'usage de figures plus particulières, la représentation dans les Éléments d'Euclide n'a pas été de nature à propager plus tard l'emploi de ces opérations là où il était moins connu qu'il n'était aux contemporains d'Euclide. Je pense en particulier à la solution d'équations du second degré sous forme d'applications d'aires. Les simples transformations qui y servent sont en réalité démontrées en II, 5 et 6; mais Euclide réserve les énoncés formels des problèmes et de leurs solutions constructives jusqu'à ce que dans le livre VI il puisse leur donner une forme géométrique plus générale, dont il ne fait pourtant aucun usage. Au contraire, dans les démonstrations du livre X, auxquelles il faut renvoyer pour faire voir le véritable profit qu'Euclide savait tirer de ces procédés, il ne les emploie que dans les simples formes qui seraient suffisamment démontrées par II. 5 et 6.

Aussi dans les Data 84 et 85, où Euclide réduit des problèmes algébriques à des applications d'aires, il les généralise par l'emploi de parallélogrammes à un angle donné au lieu de rectangles, généralisation géométrique qui n'a aucune valeur algébrique. Malgré la même généralisation, il faut voir, dans les Data 86, une représentation géométrique de la solution algébrique des équations $xy = a$, $y^2 - mx^2 = b$; les équations aux p. 115 (313) sq. en expriment une traduction presque immédiate en langage mathématique moderne. On voit donc qu'il s'agit ici de la solution algébrique d'un problème déterminé du même genre que ceux dont Diophante nous a conservé des solutions numériques.

Chap. XIII. L'idéalité des figures géométriques.

L'idéalité que Platon attribue aux figures géométriques n'était pas chose nouvelle; ce qui fut nouveau c'était de l'énoncer formellement. L'abstraction caractérisait, en effet, les premières recherches, mais elle était alors une conséquence du défaut de la faculté de différencier. Les premières connaissances géométriques dont s'emparait l'intuition n'étaient justes que pour des figures idéales. L'analyse que les élèves de Platon y appliquaient devait donc conduire aussi à des éléments idéaux: points sans extension, lignes à une seule extension etc., droites au sens exact, ne pouvant avoir, sans coïncider, qu'un seul point en commun, etc. Les définitions d'Euclide ont tout l'air d'être les résultats d'une telle analyse, ordonnés dans la suite selon les règles de la synthèse. Ainsi on n'a pas besoin de rechercher des raisons historiques de ce qu'on a pris pour deux séries différentes des définitions des premières notions géométriques, à savoir d'un côté I, 1, 2, 5 et XI, 1, de l'autre I, 3, 6 et XI, 2. La dernière série, prise en ordre inverse, indique l'analyse qui conduit de la notion de l'espace, ou du corps, à celle de la surface comme limite d'un corps etc. jusqu'au point comme limite d'une ligne; mais comme il fallait commencer la synthèse par ces derniers éléments on devait pousser l'analyse assez loin pour en avoir des critères immédiats. On n'a trouvé que les nombres de leurs dimensions indiqués dans la première série. C'est elle qui contient les véritables définitions des dits éléments, tandis que les autres deviennent, par l'inversion que demande la transition de l'analyse à la synthèse, les définitions des différentes limites, la définition 2 par exemple celle de la limite d'une ligne, et par conséquent d'une ligne limitée.

Chap. XIV. La stéréométrie.

On a reproché à Euclide de ne pas distinguer dans l'espace entre congruence et symétrie, et on a même cru que les savants grecs étaient restés ignorants d'une différence qui joue un rôle si important dans l'architecture grecque. Une telle supposition n'est pas admissible. Si Euclide n'a pas été amené à faire la dite distinction, c'est qu'ici, comme dans la géométrie plane, il veut éviter tout ce qui dépend de déplacements mécaniques et intuitifs; en même temps il préfère les énoncés généraux embrassant à la fois le plus possible. Du reste, la même distinction aurait dû être faite aussi dans la géométrie plane, dont les opérations se font toujours dans le même plan.

Comme dans la géométrie plane, Euclide regarde comme égales les figures dont la construction est univoque, abstraction faite de tout ce qui appartient au choix de la place, y compris celui des deux côtés d'un plan tant qu'on n'a pas déjà fait ce dernier choix pour un point de la figure à construire. Une telle égalité n'est pas moins caractéristique de deux figures symétriques que de deux figures congruentes. La construction XI, 23 d'un coin trilatère à côtés donnés (voir fig. 14, p. 128 (326)) et le renvoi en XI, 26 à cette construction comme preuve de l'égalité de deux coins trilatères à côtés donnés, montrent que tel a été pour Euclide le véritable critère d'égalitè. C'est, en effet, des applications de ce genre qu'il faut tirer les principes généraux qu'il suit en réalité, car les définitions ne se réfèrent qu'à l'application des mêmes principes aux figures particulières. Du reste, dans la stéréométrie, leurs énoncés ne sont pas toujours irréprochables, tandis que le principe que nous avons tiré au clair est suivi d'une maniere conséquente.

Chap. XV. EUCLIDE et ses Éléments.

La découverte faite pendant le dernier demi-siècle, qu'avant Euclide on avait déjà possédé une partie essentielle des connaissances déposées dans ses Éléments a parfois porté préjudice à l'admiration qu'on accordait à ce savant, mais à tort. On supposait que ces connaissances avaient été originairement acquises par des voies peu différentes de celles qu'on retrouve dans les démonstrations d'Euclide, et qu'il ne lui restait que la tâche de les réunir et compléter sur quelques points et d'en accommoder la représentation aux formes dont on était successivement convenu. Or je ne nie pas qu'en beaucoup de cas Euclide répète des raisonnements faits avant lui; mais ces raisonnements ne prennent leur véritable valeur logique qu'au moment où ils deviennent partie d'un système logique total qui éclaire, jusqu'à la dernière supposition, le fondement de chaque vérité particulière. C'est l'achèvement du premier système de cette nature, c'est à dire d'une œuvre purement scientifique, que nous devons à Euclide. Il ne faut pas voir dans l'ordre de ses livres un effet de contingences historiques. Ayant en vue le but de la géométrie, qui est de traiter des quantités continues, il devait rendre compte aussi du fait qu'il en existe qui ne sont pas commensurables. Voilà ce qui explique l'insertion des trois livres arithmétiques qui traitent de la condition de la commensurabilité des radicaux et préparent ainsi la connaissance de celle de leur incommensurabilité. Non seulement sur ce point, mais aussi pour surmonter les autres difficultés que j'ai signalées, Euclide a eu d'éminents devanciers; ce que j'en ai dit aura servi avant tout à faire paraître la réalite et la grandeur des obstacles à surmonter. Et qu'après tant de debats Euclide ait dit le dernier mot et que ses Éléments aient été reconnus dans la suite comme le fondement inaltérable de la géométrie, c'est bien là le meilleur témoignage du jugement de ses contemporains et successeurs.

Chap. XVI. Le sort des Éléments d'EUCLIDE.

La lecture des Éléments d'Euclide demande au lecteur un œil ouvert aux vues scientifiques de l'auteur. En même temps, il doit être, soit préparé par une instruction préalable, soit guidé par un professeur possédant lui même la tradition indispensable pour s'approprier à côté des démonstrations rigoureuses, de la pratique des méthodes nécessaires pour utiliser les vérités démontrées; nous pensons par exemple à la solution des équations du second degré. L'inégale mesure dans laquelle ces deux conditions ont été remplies et aussi, plus tard, le renvoi d'une partie de ce qu'ils contiennent à une algèbre indépendante, a préparé aux Éléments d'Euclide un sort très variable pendant l'espace de plus de deux mille ans où ils sont en usage.

Les premiers savants alexandrins possédaient complètement ces deux conditions. Ils ont donc pu développer la théorie des coniques, qui rentre dans le genre d'études que l'auteur avait en vue en composant ses Éléments, et les coniques d'Apollonius nous fournissent la meilleure illustration de la fécondité des méthodes de l'algébre géométrique. C'est au contraire pour des recherches entiérement nouvelles qu'Archimède a trouvé un fondement absolument conforme aux principes de la géométrie euclidienne. Pour cela, il lui fallait ajouter aux postulats d'Euclide de nouveaux qui sont relatifs à ses nouvelles doctrines soit infinitésimales, soit statiques. Pour composer une statique raisonnée il doit avoir imité les élèves de Platon et soumis les connaissances plus pratiques qu'il possédait déjà a une analyse pour en tirer les »éléments« qui font les points de départ de son exposé synthétique. Selon son »Ephodos« ses connaissances statiques l'ont conduit aux découvertes infinitésimales dont plus tard il a élaboré des démonstrations conformes aux exigences de la géométrie euclidienne. Dans l'Ephodos, qu'à présent je crois rédigée après ces démonstrations brillantes, il ne se borne pas à mentionner l'origine statique des découvertes; mais en y ajoutant deux nouvelles il s'en sert pour montrer les procédés qui servent à en construire de nouvelles démonstrations exactes, procédés dont il a dû se servir aussi pour construire ses démonstrations antérieures. — La trigonométrie grecque montre comment il etait possible de tirer des principes rigoureux d'Euclide les approximations que demande l'application de la géométrie aux calculs astronomiques.

Ce que contient encore mon chapitre XVI est trop fragmentaire pour en donner un résumé ultérieurement abrégé. Je me bornerai à remarquer ici que les scholastiques me servent d'exemple de ceux dont l'appropriation d'Euclide a été soutenue par un vif intérêt scientifique et plus particulièrement logique, tandis qu'ils étaient presque totalement dépourvus des habiletés pratiques que demandent les applications du savoir contenu dans ses Éléments.

INDHOLD

(Forts fra Omslagets S. 2)

		Kr.	Øre
	VI, med 4 Tavler. 1890—92	13.	75.
1.	**Lorenz, L.** Lysbevægelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kugle. 1890	2.	»
2.	**Sørensen, William.** Om Forbeninger i Svømmeblæren, Pleura og Aortas Væg og Sammensmeltningen deraf med Hvirvelsøjlen særlig hos Siluroiderne, samt de saakaldte Weberske Knoglers Morfologi. Med 3 Tavler. Résumé en français. 1890	3.	80.
3.	**Warming, Eug.** Lagoa Santa. Et Bidrag til den biologiske Plantegeografi. Med en Fortegnelse over Lagoa Santas Hvirveldyr. Med 43 Illustrationer i Texten og 1 Tavle. Résumé en francais. 1892	10.	85.
	VII, med 4 Tavler. 1890—94	13.	75.
1.	**Gram, J. P.** Studier over nogle numeriske Funktioner. Résumé en français. 1890	1.	10.
2.	**Prytz, K.** Methoder til korte Tiders, særlig Rotationstiders, Udmaaling. En experimental Undersøgelse. Med 16 Figurer i Texten. 1890	1.	50.
3.	**Petersen, Emil.** Om nogle Grundstoffers allotrope Tilstandsformer. 1891	1.	60.
4.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 4de Afhandling. Med c. 185 mest af Forfatteren tegnede Figurer i 34 Grupper. Résumé et explication des figures en français. 1891	1.	50.
5.	**Christensen, Odin T.** Rhodanchromammoniakforbindelser. (Bidrag til Chromammoniakforbindelsernes Kemi. III.) 1891	1.	25.
6.	**Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Scopelini Musei Zoologici Universitatis Hauniensis. Bidrag til Kundskab om det aabne Havs Laxesild eller Scopeliner. Med 3 Tavler. Résumé en français. 1892	3.	50.
7.	**Petersen, Emil.** Om den elektrolytiske Dissociationsvarme af nogle Syrer. 1892	1.	25.
8.	**Petersen, O. G.** Bidrag til Scitamineernes Anatomi. Résumé en français. 1893	2.	75.
9.	**Lütken, Chr.** Andet Tillæg til «Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten *Cyamus* Latr. eller Hvallusene». Med 1 Tavle. Résumé en français. 1893	»	85.
10.	**Petersen, Emil.** Reaktionshastigheden ved Methylætherdannelsen. 1894	1.	50.
	VIII, med 3 Tavler. 1895—98	12.	25.
1.	**Meinert, F.** Sideorganerne hos Scarabæ-Larverne. Les organes latéraux des larves des Scarabés. Med 3 Tavler. Résumé et explication des planches en français. 1895	3.	30.
2.	**Petersen, Emil.** Damptryksformindskelsen af Methylalkohol. 1896	1.	»
3.	**Buchwaldt, F.** En mathematisk Undersøgelse af, hvorvidt Vædsker og deres Dampe kunne have en fælles Tilstandsligning, baseret paa en kortfattet Fremstilling af Varmetheoriens Hovedsætninger. Résumé en français. 1896	2.	25.
4.	**Warming, Eug.** Halofyt-Studier. 1897	3.	»
5.	**Johannsen, W.** Studier over Planternes periodiske Livsyttringer. I. Om antagonistiske Virksomheder i Stofskiftet, særlig under Modning og Hvile. 1897	3.	75.
6.	**Nielsen, N.** Undersøgelser over reciproke Potenssummer og deres Anvendelse paa Rækker og Integraler. 1898.	1	60.
	IX, med 17 Tavler. 1898—1901	17.	»
1.	**Steenstrup, Japetus, og Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Klump- eller Maanefiskene *(Molidæ)*. Med 4 Tavler og en Del Xylografier og Fotogravurer. 1898	4.	75.
2.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 5te Afhandling. Med 42 Figurgrupper. Résumé en français. 1899	1.	60.
3.	**Meyer, Kirstine.** Om overensstemmende Tilstande hos Stofferne. En med Videnskabernes Selskabs Guldmedaille belønnet Prisafhandling. Med en Tavle. 1899	2.	60.
4.	**Jørgensen, S. M.** Om Zeise's Platosemiæthylen- og Cossa's Platosemiamminsalte. Med 1 Tavle. 1900	»	75.
5.	**Christensen, A.** Om Overbromider af Chinaalkaloider. 1900	1.	»
6.	**Steenstrup, Japetus.** Heteroteuthis *Gray,* med Bemærkninger om Rossia-Sepiola-Familien i Almindelighed. Med en Tavle. 1900	»	90.
7.	**Gram, Bille.** Om Proteinkornene hos oliegivende Frø. Med 4 Tavler. Résumé en français. 1901	2.	50.
8.	**Meinert, Fr.** Vandkalvelarverne *(Larvæ Dytiscidarum)*. Med 6 Tavler. Résumé en français. 1901	5.	35.
	X, med 4 Tavler. 1899—1902	10.	50.
1.	**Juel, C.** Indledning i Læren om de grafiske Kurver. Résumé en français. 1899	2.	80.
2.	**Billmann, Einar.** Bidrag til de organiske Kvægsølvforbindelsers Kemi. 1901	1.	80.
3.	**Samsøe Lund og Rostrup, E.** Marktidselen *(Cirsium arvense)*. En Monografi. Med 4 Tavler. Résumé en français. 1901	6.	»
4.	**Christensen, A.** Om Bromderivater af Chinaalkaloiderne og om de gennem disse dannede brintfattigere Forbindelser. 1902	1.	40.
	XI, med 10 Tavler og 1 Kort. 1901—03	15.	05.
1.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceæ. 6te Afhandling. Med 47 Figurgrupper. Résumé en français. 1901.	2.	15.
2.	**Ravn, J. P. J.** Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. I. Lamellibranchiater. Med 1 Kort og 4 Tavler. 1902.	4.	»
3.	**Winther, Chr.** Rotationsdispersionen hos de spontant aktive Stoffer. 1902	2.	»
4.	**Ravn, J. P. J.** Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. II. Scaphopoder, Gastropoder og Cephalopoder. Med 5 Tavler. 1902	3.	40.
5.	**Winther, Chr.** Polarimetriske Undersøgelser II: Rotationsdispersionen i Opløsninger	1.	60.
6.	**Ravn, J. P. J.** Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. III. Stratigrafiske Undersøgelser. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1903	3.	85.
	XII, med 3 Tavler og 1 Kort. 1902—04	10.	50.
1.	**Forch, Carl, Knudsen, Martin, und Sørensen, S. P. L.** Berichte über die Konstantenbestimmungen zur Aufstellung der hydrographischen Tabellen. Gesammelt von *Martin Knudsen.* 1902	4.	75.
2.	**Bergh, R.** Gasteropoda opisthobranchiata. With three plates and a map. (The Danish expedition to Siam 1899—1900, I.) 1902	3.	45.
3.	**Petersen, C. G. Joh., Jensen, Søren, Johansen, A. C., og Levinsen, J. Chr. L.** De danske Farvandes Plankton i Aarene 1898—1901. 1903	3.	25.
4.	**Christensen, A.** Om Chinaalkaloidernes Dibromadditionsprodukter og om Forbindelser af Alkaloidernes Chlorhydrater med højere Metalchlorider. 1904.	1.	35.

Mathematiske og astronomiske Skrifter

udgivne af det Kgl. danske Videnskabernes Selskab

(udenfor Skrifternes 6. Række, se Omslagets S. 2—3):

	Kr.	Øre
Braae, Joh. Meridianbeobachtungen von 304 B- und M-Sternen. 1914	»	65
Hansen, C. Recherches sur les singularités de certaines séries spéciales sur leur cercle de convergence. 1908	1.	20
Hansen, P. C. V. En Sætning om den Eulerske Faktor svarende til Differentialligningen $M + N\frac{dy}{dx} = 0$. 73	»	65
Hansteen, C. Den magnetiske Inclinations Forandring i den nordlige tempererte Zone. I, med et Kort. 55	2.	»
—— —— —— II. 57	1.	15
Hertzsprung, S. Reduktion af Maskelynes Iagttagelser af smaa Stjerner. 65	1.	15
Hjelmslev, J. Om Regning med lineære Transformationer. 1911	»	90
—— Grundlag for Fladernes Geometri. 1914	1.	65
Jensen, J. L. W. V. Undersøgelser over en Klasse fundamentale Uligheder i de analytiske Funktioners Theori. I. 1916	»	90
Juel, C. Om ikke-analytiske Kurver. 1906	1.	95
—— Om simple cykliske Kurver. 1911	»	65
—— Einleitung in die Teorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung. 1914	1.	75
—— Die elementare Ringfläche vierter Ordnung. 1916	»	60
Nielsen, N. Recherches sur une classe de fonctions méromorphes 1904	1.	45
—— Recherches sur les fonctions sphériques. 1906	1.	75
—— Recherches sur quelques généralisations d'une identité intégrale d'Abel. 1907	1.	20
—— Recherches sur les nombres de Bernoulli. 1913	2.	40
—— Recherches sur les fonctions de Bernoulli. 1915	1.	65
Nørlund, N. E. Ueber lineare Differenzengleichungen. 1911	»	65
—— Untersuchungen über die Eigenbewegungen für 140 Sternen des IV. Secchischen Typus mittels älterer und eigener Beobachtungen. 1912	1.	40
Ramus, C. Undersøgelse af Resten i Lagranges Række, samt: Om en Egenskab ved de lineære Differential-Ligninger med 2 Variable. 42	»	65
—— Om nogle Curvers Rectification ved elliptiske Functioner. 45	»	50
—— Om Ellipsoiders Tiltrækning og om de ellipsoidiske Ligevægtsfigurer af flydende Masser. 45	1.	65
Schjellerup, H. C. F. C. Tycho Brahes Original-Observationer benyttede til Banebestemmelse af Cometen 1580. 54	1.	»
Steen, A. Hovedsætninger om de overelliptiske Funktioner og: Om dobbelte bestemte Integraler. 49	»	65
—— Om Integrationen af Differentialligninger. Résumé en français. 68	»	35
—— Om Ændringen af Integraler af irrationale Differentialer. 69	»	40
—— Læren om homogene tunge Vædskers Tryk paa plane Arealer, m. 1 Tavle. Résumé en français. 72	»	75
—— Om Muligheden af et Par lineære Differentialligningers Integration ved endelige explicite Funktioner. 75	»	75
Strömgren, E. Ueber den Ursprung der Kometen. 1914	2.	»
Thiele, T. N. Om Anvendelse af mindste Kvadraters Methode i nogle Tilfælde, hvor en Komplikation af visse Slags uensartede tilfældige Fejlkilder giver Fejlene en »systematisk« Karakter. 80	»	85
Zeuthen, H. G. Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, m. 5 Tavler. Résumé en français. 73	3.	60

	Kr.	Øre
d'Arrest H. L. Siderum nebulosorum observationes Havnienses. 67	12.	»
Hansen & Olufsen. Tables du soleil. 53	4.	»
—— —— Supplément aux tables du soleil. 57	»	35
Jürgensen, Chr. Sur le mouvement du pendule. 53	»	65
Schjellerup, H. C. F. C. Stjernefortegnelse, indeholdende 10,000 Positioner og teleskopiske Fixstjerner imellem — 15 og + 15 Graders Deklination. Med 1 Tavle. 64	7.	»